doi: 10.11720/wtyht.2019.2562

王守进,敬朋贵,蔡杰雄.基于高斯柬理论的有限频核函数计算[J].物探与化探,2019,43(1):110-117.http://doi.org/10.11720/wtyht.2019.2562 Wang S J,Jing P G,Cai J X.The finite frequency kernel function calculation based on Gassian beam theory[J].Geophysical and Geochemical Exploration, 2019,43(1):110-117.http://doi.org/10.11720/wtyht.2019.2562

基于高斯束理论的有限频核函数计算

王守进1,故朋贵2,蔡杰雄1

(1.中国石油化工股份有限公司石油物探技术研究院,江苏南京 025111;2.中国石油化工股份有限公司勘探分公司,四川成都 610041)

摘要:相对于常规射线层析速度建模,基于波动理论的层析速度建模考虑了波的带限特性,反演分辨率更高。波动理论层析的核心在于波路径(有限频核函数)的计算。文中详细介绍了一种基于高斯束算子计算有限频核函数的方法,分析了初始束宽度和高斯束出射角度间隔对计算精度的影响;并针对高斯束近源处误差较大的缺陷,提出 了改进的束参数以提高近源精度;详细分析了初始束宽度和角度间隔对改进高斯束方法的影响及改进高斯束的聚 焦特性;数值算例验证了该方法在缓变介质中计算有限频核函数的可行性,计算效率较高且可处理回折波的核函数。

关键词:有限频;核函数;高斯束;初始束宽度;束参数

中图分类号: P631.4 文献标识码: A 文章编号: 1000-8918(2019)01-0110-08

0 引言

目前旅行时层析速度建模主要基于几何射线理 论。在无限带宽近似下,旅行时和振幅的扰动只与 射线路径上的速度扰动有关。实际上,地震波是带 限的,中心射线周围一定空间范围内的速度扰动都 会对旅行时和振幅产生影响。并且射线理论存在着 诸如多路径、阴影区和焦散等问题。因此,许多学者 提出了基于波动理论的层析建模方法^[1-4]。有限频 核函数(Frechet 导数)替代射线路径进入了层析领 域^[5-6]。

波动理论层析的核心在于有限频核函数的计 算。已经有诸多学者提出了有限频核函数的计算方 法。一些学者采用有限差分算子计算核函数^[7-10], 该方法可以处理任意复杂的速度模型,但计算量较 大。K Yoshizawa 和 Kennett 采用渐进射线理论计算 面波核函数^[11]。Fliedner 和 Bevc、Xie 等采用单程 波算子计算核函数^[12-13],虽可以处理波传播中的散 射绕射等现象,但是波场传播角度受限。Liu 利用

频率空间域有限差分算子计算了均质和非均质菲涅 耳体内的有限频核函数^[14]。高斯束是波动方程的 高频渐进解,该方法已经广泛应用于地震正演和成 像中。地震波场可以近似为多个高斯束的叠加,相 比于几何射线,高斯束保留了波的动力学特征;相比 于波动方程有限差分解,高斯束计算效率高;相比于 单程波,高斯束又可以处理宽角度的回折波。因此, 笔者详细介绍了利用高斯束计算有限频核函数的方 法,分析了影响高斯束计算格林函数精度的因素 (高斯束出射角度间隔和初始束宽度),并针对高斯 束近源处误差较大的问题,采用了改进的高斯束参 数。通过均质模型,对比了高斯束计算的格林函数 以及单频核函数、有限频核函数与解析解之间的误 差;计算了常梯度速度模型下的有限频核函数。数 值结果表明,利用高斯束算子计算有限频核函数可 以保证精度和计算效率。

1 高斯束计算格林函数

根据 Ceveny 射线理论,高斯束是波动方程的高

收稿日期: 2017-12-14;修回日期: 2018-09-13

基金项目:国家科技重大专项(2017ZX05036)

作者简介:王守进(1991-),男,硕士,现就职于中石化石油物探技术研究院,工程师,从事地震偏移成像及速度反演工作。Email:wangshj.swty @ sinopec.com

频渐进解,在 2D 情况下,高斯束频率域表达式为^[15]
$$u(s,n,\omega) = \left[\frac{v(s)}{Q(s)}\right]^{1/2} \exp\left[i\omega\tau(s) + \frac{i\omega}{2}\frac{P(s)}{Q(s)}n^{2}\right]$$
(1)

其中,(*s*,*n*)构成射线中心坐标系,*s*为中心射线的 弧长,*n*为观测点距中心射线的垂直距离,*τ*为中心 射线上的旅行时,ω为圆频率。*P*和*Q*是动态射线 追踪的解,为复数标量。满足如下方程式,该方程可 以通过四阶龙格—库塔方法求解:

$$\mathrm{d}Q(s)/\mathrm{d}s = v(s)P(s) \ , \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{v^2(s)} \frac{\partial^2 V(s,n)}{\partial n^2} Q(s) \quad (3)$$

其中,P、Q的初始条件 P_0 、 Q_0 可由下式给出:

$$P_0 = i/V_0, Q_0 = \omega_r \omega_0^2 / V_{0,0}$$

式中, ω_r 是参考频率, ω_0 为高斯束初始有效宽度,是 影响高斯束精度的重要参数。由于高斯束是中心射 线周围的高频渐进解,当速度在一个高斯束范围内 变化较快时,高斯束会变得不精确,因此在传播中应 尽量令高斯束不会过度展宽。一般令初始束宽度等 于参考频率对应的平均波长,即 $\omega_0 = v_a/f_r$ 。 V_0 是射 线出射位置的介质速度。P,Q可以分解为平面波 解和球面波解的复合形式。其中 p_1, q_1 为平面波 解, p_2, q_2 为球面波解,即:

 $P = \varepsilon \times p_1 + i \times p_2, \quad Q = \varepsilon \times q_1 + i \times q_{2\circ}$

式中, ε 为束参数,常规高斯束对应的 $\varepsilon = \omega_r w_0^2$,下面 将会讨论改进的束参数对高斯束的影响。

2D 情况下,格林函数可以表达为不同出射方向 高斯束的叠加:

$$G(r,r_s;\omega) \approx \frac{i}{2} \sqrt{\frac{Q_0}{V_0}} \int u_{GB}(r,r_s,\omega) \,\mathrm{d}\theta \quad (4)$$

已知 2D 情况下,格林函数的解析表达式为:

$$G_{2D}(X', X, \omega) = \frac{\exp\left\{\frac{\mathrm{i}\omega r}{v} + \mathrm{i}\pi/4\right\}}{\sqrt{2\omega r/\pi v}} \quad (5)$$

为分析高斯束方法计算的格林函数精度,采用 高斯束方法和解析表达式计算均匀介质的格林函 数。均匀介质速度设定为2000 m/s,X和Z方向均 为501 个样点,间距都取5m。将炮点置于模型中心 (1250,1250)处。分别采用解析表达式和高斯束计 算该速度模型20 Hz 的格林函数,并抽取Z=1250处水平线的结果进行对比分析。设置初始束宽度 $\omega_0=10$ 、50、100、150、200、300、400,分别计算不同初 始束宽度高斯束合成的格林函数,图1a显示了不同 初始束宽度计算的格林函数结果与解析解的对比情 况;图1b显示了高斯束方法分别采用不同的出射角 度间隔da=1、2、3、4、5、6、7格林函数计算结果与解 析解的对比情况。从图中可以看出:高斯束计算的 格林函数与解析解在震源附近有些许误差,但当传



a—不同初始束宽度对格林函数精度的影响;b—不同角度间隔对格林函数精度的影响

a-effects of different initial beam widths on the accuracy of Green function; b-effects of different angle intervals on the accuracy of Green function

图 1 不同初始束宽度和角度间隔对格林函数精度的影响

Fig.1 The accuracy of Green function with different initial beam width and angular spacing

43卷

播距离大于一个波长时,高斯束计算的格林函数与 解析解拟合较好。当初始束宽度等于10m时,高斯 束计算格林函数的结果与解析解结果相差较大,当 初始束宽度大于一个波长(100 m)时,初始束宽度 的增大对高斯束计算格林函数的精度影响较小。随 着间隔角度的增加,高斯束计算精度逐渐降低。因 此,为保证高斯束计算格林函数精度,常规高斯束方

> x/m 1000 1500 500 2000 2500 500 (a) (b) 0 500 500 1000 1000 m/2 1500 1500 2000 2000 2500-2500 500 1000 1500 2500 500 1000 1500 2000 (d) 1.0 (c) 500 0.5 1000 m/2 1500 -0.5 2000 -1.0 2500

a-20 Hz 单频格林函数的解析解;b-20 Hz 单频格林函数高斯束解;c-解析解和高斯束叠加解的差值;d-水平切线误差对比 a-20 Hz Green function analytical solution; b-20 Hz Green function GB solution; c-error of two solution; d-horizon slice of the error 图 2 20 Hz 单频格林函数的高斯束解、解析解及其误差比较

Fig.2 Error comparison of 20 Hz Green function of GB, analytical solution

通过前面数值实验看出,高斯束叠加计算的格 林函数与解析解在震源附近存在误差。这是由于束 参数的选择,使得高斯束初始波前曲率为0,高斯束 在近源处表现出平面波特征,而解析格林函数在震 源处应为球面波。采用改进的动态射线束参数[17]. 使高斯束初始波前曲率接近圆曲率,可以提高高斯 束在近源处的计算精度。此处省去复杂的推导,直 接给出菲涅耳体束参数,如下式:

$$\varepsilon(s) = \frac{\frac{\omega_{\text{ref}}\gamma_{\text{F}}^2}{2} + \sqrt{\left|\left(\frac{\omega_{\text{ref}}\gamma_{\text{F}}^2}{2}\right)^2 - 4q_1^2(s)q_2^2(s)\right|}}{2q_1^2(s)}, (6)$$

其中,γ_F为菲涅尔半径,表达式为:

$$\gamma_{\rm F}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_{\rm ref}} \frac{q_2(s)}{p_2(s)} + \frac{\lambda_{\rm ave}^2}{16}} , \qquad (7)$$

其中,λ_{we}为参考频率对应的速度模型的平均波长。

法应使初始束宽度大于一个波长,从而保证高斯束 传播过程中展布不会过宽,且出射角度间隔不能过 大。具体的高斯束出射角度间隔应满足 λ/ (2ω₀)^[16]。图 2a~2d 分别为采用初始束宽度 100 m.角度间隔2°的高斯束叠加而成的格林函数和解 析解、两者残差及 Z=1250 处水平切线对比结果。 证实了利用高斯束计算格林函数精度较高。



改进高斯束精度受初始射线宽度和出射角度数 影响较小。图 3a 显示了不同初始束宽度对改进束 参数的高斯束精度的影响,从中可以看出,初始束宽 度从波长的 0.1~4 倍变化,不同初始束宽度的高斯 束结果与解析解误差都较小。结合图 1a 初始束宽 度对常规高斯束精度影响分析,改进束参数的高斯 束叠加结果受初始束宽度的影响较小,不同的初始 束宽度(即使初始束宽度小于一个波长)都能给出 比较精确的结果。图 3b 显示了采用不同束间隔角 度计算格林函数与解析解的误差。角度间隔分别为 1°、2°、4°、8°、12°、16°,从图中可以看出,即便束角 度间隔增大到 16°,其解与解析解误差也并不大。 综上分析,改进束参数使得高斯束模拟精度受初始 射线宽度和角度间隔的影响小。为节省计算量,一 般选择初始束宽度为半个波长大小,束角度间隔选 择10°即可。



a一改进高斯束不同初始束宽度对计算格林函数结果的影响;b一改进高斯束不同出射角度间隔对计算格林函数的影响

a-beam width effect; b-angular spacing effect

图 3 不同束宽度和出射角度间隔对改进高斯束精度的影响

Fig.3 Effect of beam width and angular spacing for modified GB

图 4a、4b 对比显示了常规束参数和改进束参数 的单条高斯束的对比,可以看出改进束参数的高斯 束波前在震源附近更接近圆形。图 4c 展示了改进 束参数的单频格林函数在震源处与解析解的结果更 加接近。上述特征表明:改进束参数模拟的波场更 接近球面波,尤其是在近源处精度较高。



a-常规束参数高斯束;b-改进束参数高斯束;c-改进束参数与常规高斯束的对比

a-normal beam parameter Gaussian beam; b-improved beam parameter Gaussian beam; c-the improved beam parameters are compared with the conventional Gaussian beam

图 4 常规高斯束与改进高斯束单条高斯束结果对比



改进高斯束还具有聚焦特性。设计如图 5 所示 高低速相间分布的层状速度模型。速度分别为 2.5、1.0、2.5、4.0、5.0 km/s。图 6 对比了单条常规高 斯束与改进高斯束经过速度异常时的聚焦情况,可 见改进高斯束具有更好的聚焦作用,符合波场传播 中能量分配原则^[17]。

综上分析,改进束参数的高斯束较常规高斯束 有如下四个优点:

1)改进高斯束在震源处传播更加符合球面波 特性,因此近震源处格林函数精度更高;





43 卷

图 5 高低速相间分布的层状速度模型





a—常规高斯束;b—改进高斯束 a—conventional beam;b—modified beam 图 6 单条高斯束经过层状速度模型时束宽度变化

Fig.6 Beam width variation when single beam propagating layer model

2)改进高斯束的精度受初始束宽度影响更小;

3)改进高斯束的精度受高斯束出射角度间隔 影响更小,从而可以以较少的束计算格林函数,减少 计算量;

4)在变速介质中传播时,改进高斯束有更好的 聚焦特性,符合波场传播规律。

综合考虑计算精度和计算效率,建议初始射线 宽度设定为半个波长宽度,角度间隔选择 10°。

2 计算敏感度核函数

多名学者研究了基于波动理论的敏感度核函数^[2,4,19]。单频旅行时敏感度核函数*K^F*可以表示为:

$$K^{F}(r,r_{s},r_{c},\omega) = \operatorname{Imag}\left[2k_{0}^{2}\frac{G(r;r_{s},\omega)G(r;r_{c},\omega)}{G(r_{c};r_{s},\omega)}\right]$$
(8)

其中,k₀=ω/v(r)是背景场波数,v(r)是背景速度 场,G是格林函数,r是空间位置,r_s、r_c是源点和接 收点位置。上式中,敏感度核函数由两个格林函数 的相关构成,一个是从震源发出,另一个是由接收点 发出。带限敏感度核函数可以由单频敏感度核函数 的加权叠加获得:

$$K_B(r,r_s,r_c) = \int \frac{W(\omega)}{\omega} K^F(r,r_s,r_c,\omega) d\omega , \quad (9)$$

其中,权重函数采用刘玉柱^[18]给出的高斯权重系数:

$$W(\omega) = \frac{w(\omega)}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} w(\omega) \,\mathrm{d}\omega} , \qquad (10)$$

$$w(\omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$$
(11)

其中, ω 为圆频率, ω_0 为频率展布范围的中心频率, σ 为中心圆频率附近具有较高能量的带宽展布范 围,一般取 0.3,权重系数如图 7 所示。





从表达式(7)、(8)可以看出,不论单频还是带限敏感度核函数,其核心就是背景速度场中格林函数的计算。速度模型仍选用前文计算格林函数的均质模型,设置炮点位置(500m,1250m),检波点位置(2000m,1250m)。图 8a、8b 显示了单频 20 Hz 的敏感度核函数的解析解和高斯束解,图 8c,8d 显示

了解析解和高斯束计算的核函数的误差。图 9a、9b 分别显示了 5~25 Hz 有限频核函数的解析解和高斯 束解,图 9c 显示了解析解与高斯束解中间水平切线 的差值。两种方法计算的带限核函数几乎一致,证 明了利用了高斯束算子计算有限频核函数的有效 性。





a-20 Hz analysis kernel function; b-20 Hz GB solution kernel function; c-error of analysis solution and GB solution; d-error slice of analysic solution and GB solution

图 8 解析解与高斯束计算的 20 Hz 单频核函数及误差





a—5~25 Hz 带限核函数的解析解;b—5~25 Hz 带限核函数的高斯束解;c—中间位置横向切线结果对比 a—5~25 Hz analysis kernel function;b—5~25 Hz GB kernel;c—horizon slice of kernel function of two methods **图 9 解析解和高斯束解带限核函数及误差对比**



在近地表速度建模中,回折波层析^[20]是目前流 行的方法。该方法中,初始模型常设为常梯度速度 模型。由于高斯束没有角度限制,所以非常适合在 此种模型下计算有限频核函数。设置常梯度速度模 型,令速度在 Z 方向梯度为 2,炮检点水平距离 1 500 m。利用高斯束算子计算该模型的 0~50 Hz 的 带限核函数,结果如图 10a 所示,中间位置的竖直切 线结果如图 10b 所示。



a—常梯度速度模型带限核函数;b—中间位置纵向切线结果 a—frequency-limited kernel function;b—vertical slice of kernel function

图 10 常梯度模型下的带限核函数及纵向切线结果

Fig.10 Kernel function of constant velocity gradient

通过以上数值实验可以看出波动层析和射线层 析的区别在于:射线层析中只有几何射线上的速度 扰动对旅行时产生影响,且各速度扰动的权重为1; 而在波动层析中,中心射线周围一定范围内的速度 扰动都会对旅行时产生影响,且中心射线上的权重 为局部极小值,权重最大值出现在中心射线两侧一 定位置处。

在基于波动理论的中深层速度层析建模中,需 要计算地下某反射点到炮点、检波点的带限核函数。 文中选取四川丁山某工区的深度域初始速度模型计 算带限核函数。速度模型平均速度为4552m,主频 为35Hz,选取主波长的一半作为初始射线宽度,即 65m,出射角度间隔为10°,层析敏感度核函数如图 10b。与射线层析路径相比(图11a),带限核函数拥 有更宽的空间展布,即除了中心射线路径上的速度 对走时残差有影响外,中心射线周边一定范围内的 速度异常也影响走时残差,其影响程度的权重为带 限核函数的幅值。相应的层析矩阵零元素更少,层 析反演更加稳定。因此,利用高斯束计算格林函数 将在波动理论层析中发挥重要作用。



a—丁山某工区深度域初始速度模型;b—从反射点出发到达炮检点的带限核函数

a-Dingshan velocity model; b-kernel function from source point to reflect point and from reflect point to detector point

图 11 丁山某工区速度模型及高斯束方法计算得到层析带限核函数

Fig. 11 Dingshan velocity model and frequency-limited kernel function by GB method

3 结论

 高斯束近似格林函数的主要影响因素有初 始束宽度和出射角度间隔。利用高斯束计算的核函 数与解析解相比,除近源处误差较大外,远场处(传 播距离大于一个波长)基本一致。常规高斯束初始 束宽度要大于一个平均波长且要保证较小的出射角 度间隔才能保证计算精度。

2)改进束参数的高斯束能提高近源处的模拟 精度,且受初始束宽度和出射角度间隔的影响较小。 相比常规高斯束,改进高斯束经过速度异常区域时 波场更聚焦。

3)利用高斯束计算层析敏感度核函数,可以适 应缓慢变化的非均匀介质,且计算效率较高。

参考文献(References):

- [1] Devaney A J.Geophysical diffraction tomography[J].IEEE Transa-Ctions on Geoscicence and Remote Sensing, 1984, 22(1):3-13.
- Jocker, Spetzler, Smeulders, et al. Validation of first-order diffraction theory for the traveltimes and amplitudes of propagating waves
 [J].Geophysics, 2006, 71(6): T167 T177.
- [3] Luo Y, Schuster G T. Wave-equation traveltime inversion [J]. Geophysics, 1991, 56(5):645-653.
- [4] Woodward. Wave-equation tomography [J]. Geophysics, 1992, 57
 (1):15-26.
- [5] Dahlen F A, Hung S H, Guust N. Frechet kernels for finite-frequency traveltimes-I. Theory [J]. Geophysics, 2000, 141:157 ~ 174.
- [6] Huang Z, Su W, Peng Y, et al. Rayleigh wave tomography of China and adjacent regions [J]. Journal of Geophysical Research Solid Earth, 2000, 108(B2).
- [7] Zhao, Jordan T H, Chapman C H. Three-dimensional Frechet differen-tial kernels for seismic delay times [J]. Geophysics, 2000, 141: 558 - 576.
- [8] 姜勇.波路径旅行时层析成像方法研究[D].青岛:中国海洋大

学,2006.

Jiang Y. Wavepath traveltime tomography [D]. Qingdao: Ocean University of China, 2006.

- [9] Zhang Z G, Shen Y, Zhao L. Finite-frequency sensitivity kernels for head waves[J].Geophysics, 2007, 171:847 - 856.
- [10] 谢春,刘玉柱,董良国,等.基于声波方程的有限频伴随状态法初 至波旅行时层析[J].石油地球物理勘探,2015,50(2):274-282.
 Xie C,Liu Y Z,Dong L G, et al. First arrival tomography with finite frequency adjoint-state method based on acoustic wave equation [J].Oil Geophysical Prospecting,2015,50(2):274-282.
- [11] Yoshizawa K, Kennett B L N.Sensitivity kernels for finite-frequency surface waves [J].Geophysics, 2005, 162:910 - 926.
- [12] Fliedner, Bevc D. Automated velocity model building with wavepath tomography[J].Geophysics, 2008, 73: 195-204.
- [13] Xie X B, Lokshtanov D, Pajchel J. Finite-frequency sensitivity kernels and turning-wave tomography, possibilities and difficulties [C]//Seg Technical Program Expanded, 2014:4821-4826.
- [14] Liu Y Z, Dong L G. Sensitivity kernel for seismic Fresnel volume tomography[J].Geophysics, 2009, 74(5): u35 - u46.
- [15] Hill N R.Gaussian beam migration [J].Geophysics, 1990, 55(11): 1416-1428.
- [16] Geng Yu, Xie X B.Gaussian beam based finite-frequency turning wave tomograph[J].Journal of Applied Geophysics, 2014, 109:71 - 79.
- [17] 杨继东,黄建平,吴建文,等.不同地震波束构建格林函数的精 度影响因素分析[J].石油地球物理勘探,2015,50(6):1073-1082.

Yang J D, Huang J P, Wu J W, et al. Accuracy factors of Green function constructed with different seismic wave beams [J].Oil Geophysical Prospecting, 2015, 50 (6):1073-1082.

- [18] 刘玉柱,董良国,李培明,等.初至波菲涅尔体地震层析成像
 [J].地球物理学报,2009,52(9);2310-2320.
 Liu Y Z, Dong L G, Li P M, et al. Fresnel volume tomography based on the first arrival of the seismic wave[J]. Chinese J. Geophys. (in Chinese), 2009,52(9);2310-2320.
- [19] Spetzler, Jesper, Snieder, et al. The Fresnel volume and transmitted waves [J]. Geophysics, 2004, 69(69):653-663.
- [20] Stefani J P.Turning-ray tomography[J].Geophysics, 1995, 60(6): 1917-1924.

The finite frequency kernel function calculation based on Gassian beam theory WANG Shou-Jin¹, Jing Peng-Gui², CAI Jie-Xiong¹

(1. Academy of Petroleum Geophysical Exploration Technology, SINOPEC, Nanjing 025111, China; 2. Branch of Geological Exploration, SINOPEC, Chengdu 610041. China)

Abstract: In comparison with the routine ray tomographic velocity model construction, the tomographic velocity model construction based on undulation theory considers the belt limitation property of the wave, and hence it has higher inversion resolution. The core of the undulation theory tomography lies in the calculation of the wave route (finite frequency kernel function). This paper introduces in detail a method for calculation of finite frequency kernel function based on Gassian beam operator, analyzes the effect of the initial width and the emergence angle interval of the Gassian beam on the calculation precision. To overcome the defect of the relatively large error at the near-source place of the Gassian beam, the authors put forward improved beam parameters so as to raise the near-source precision. This paper also analyzes in detail the effect of initial beam width and angle interval on the improved Gassian beam and the focussing characteristics of the improved Gassian beam. Digital calculation example has verified the feasibility of this method in calculation of finite frequency kernel function. Its calculation efficiency is relatively high and it can process kernel function of the inflection wave. **Key words**; finite frequency; kernel function; Gassian beam; initial beam width; beam parameters