doi: 10.11720/wtyht.2023.1605

邢涛,王垚,李建慧. 基于 B 样条插值的瞬变电磁响应一维精确计算[J]. 物探与化探,2023,47(5):1316-1325. http://doi.org/10.11720/wtyht. 2023.1605

Xing T, Wang Y, Li J H. One-dimensional accurate calculation of transient electromagnetic responses based on B-spline interpolation [J]. Geophysical and Geochemical Exploration, 2023, 47(5): 1316–1325. http://doi.org/10.11720/wtyht. 2023.1605

## 基于 B 样条插值的瞬变电磁响应一维精确计算

### 邢涛1.王垚2.李建慧2,3

(1.北京探创资源科技有限公司,北京 100071;2.中国地质大学(武汉)地球物理与空间信息学院,湖北武汉 430074;3.中国地质大学(武汉)地质过程与矿产资源国家重点实验室,湖北武汉 430074)

摘要:基于频谱法的瞬变电磁法一维正演策略中,多个计算环节对瞬变电磁响应计算精度有重要影响。为了提高一维正演效率,通常只直接计算数十个频点的频率域电磁响应,再采用三次样条插值将频率域电磁响应扩展至数百个频点。尽管三次样条插值函数计算的数值结果已能满足大多数正演需求,但其计算精度仍有提升空间。本文将高次 B 样条插值引入至瞬变电磁法一维正演,用于代替传统三次样条插值,并以磁偶源和圆形回线源为例验证了方法准确性。结果表明,对于多个地电模型,基于高次 B 样条插值计算的瞬变电磁响应精度均优于基于传统三次样条的计算结果。

关键词:瞬变电磁法;一维正演;B样条插值

中图分类号: P631 文献标识码: A 文章编号: 1000-8918(2023)05-1316-10

#### 0 引言

瞬变电磁法广泛应用于固体矿产勘查、水文地 质调查等领域<sup>[1-3]</sup>。目前,瞬变电磁法资料处理解 释仍以一维反演为主。正演是勘探方案设计、资料 处理和反演解释的基础,因此正演精度对提高处理 解释精度至关重要<sup>[4]</sup>。

瞬变电磁法一维正演算法通常采用频谱法,即 首先显式计算数十个频点的频率域电磁响应,再采 用傅里叶逆变换或拉普拉斯逆变换快速算法获取时 间域电磁响应。在这一过程中,多个计算环节对瞬 变电磁响应精度有重要影响。根据势与场的转换关 系,从空间域矢量势显式计算数十个频点的频率域 电磁响应。其中关于波数的积分含有零阶或一阶形 式的第一类贝塞尔函数,该类积分通常称作汉克尔 变换,求解时既可以采用数字滤波算法,也可以采用 数值积分算法<sup>[5]</sup>。其中数字滤波算法简单、成熟且 效率高。如 Ghosh<sup>[6]</sup>首次采用线性数字滤波法求解 汉克尔变换; Anderson<sup>[7]</sup>采用卷积和自适应的技术, 避免了核函数的重复计算和滤波系数的重新设计, 大大提高了数字滤波法的效率和适用范围。数值积 分求解的方法计算速度较慢,但其计算精度更高,且 适用性更强。如 Chave<sup>[8]</sup>采用连分式展开加速定积 分级数求和方法提高了计算效率,该方法适用于核 函数迅速变化且数值精度要求高的情况; Key<sup>[9]</sup>提 出了采用 Shanks 变换加速定积分级数求和方法,该 方法克服了数值积分效率低的问题,同时误差可控, 精度高于数字滤波法。

由频率域电磁响应变换为时间域电磁响应有两 类方法:一是采用数字滤波方法的正弦和余弦变换。 数字滤波器通常需要数百个频点的频率域电磁响 应,一般只显式计算数十个频点的频率域电磁响应, 再通过三次样条插值的方法进行拓展。Anderson<sup>[10]</sup>提出的双精度迟滞卷积算法使得同一组频率 域电磁响应可用于计算多个时刻的时间域电磁响

收稿日期: 2022-12-09; 修回日期: 2023-04-18

基金项目: 国家自然科学基金(42022030)

**第一作者:**邢涛(1983-),男,硕士,高级工程师,长期从事地球物理勘探方面的研究工作。Email:156663062@qq.com

通讯作者:李建慧(1982-),男,教授,博士生导师,主要研究方向为电磁法数值计算与资料处理研究。Email:lihiicumt@ 126. com

应,之后还开发了基于数字滤波算法和数值积分算 法的混合算方法,该方法结合了2类算法的优点,适 用范围更广<sup>[11]</sup>。另一种求解时间域电磁响应方法 是拉普拉斯逆变换快速算法,主要有 Gaver-Stehfest、 Euler 和 Talbot 算法。Knight 等<sup>[12]</sup>首先将 Gaver-Stehfest 算法应用于瞬变电磁法正演计算,该算法简单 易行,但易受舍入误差影响,晚期精度差;Euler 和 Talbot 快速算法即使在双精度计算环境下,也具有 舍入误差影响小、计算结果精度高的优点,Li等<sup>[13]</sup> 将 Euler 和 Talbot 快速算法应用于瞬变电磁法一维 正演中的拉普拉斯逆变换,同时保证了高精度和高 效率。

目前在正弦和余弦变换前,通常使用传统三次 样条插值拓展数十个频点的频率域电磁响应,经其 计算的电磁场精度虽能满足一般正演和反演计算需 求,但不满足定量分析电磁场扩散规律的需求。本 文拟将高次 B 样条插值函数引入至瞬变电磁法一 维正演中,替代传统三次样条插值,以进一步提高瞬 变电磁法正演精度。B 样条由 Schoenberg 在 1946 年提出<sup>[14]</sup>, Boor 和 Cox 分别给出递推定义<sup>[15-16]</sup>。B 样条曲线是根据贝塞尔曲线演化出来的,兼备了贝 塞尔曲线良好的拟合和曲率连续的优点,且每个控 制点只影响曲线的一小段,克服了贝塞尔曲线不具 有局部性质的缺点<sup>[17]</sup>。因此 B 样条曲线在数据插 值和拟合中更加灵活和稳定,可以适应不同的数据 分布和需求,被广泛应用于电磁法中。Inoue<sup>[18]</sup>提 出了使用三次 B 样条拟合不规则间隔的噪声数据, 并进行了最优值检验。李貅等<sup>[19]</sup>采用 B 样条插值 重构实测数据,高密度采样后实现瞬变电磁法微分 电导成像。Wang 等<sup>[20]</sup>采用二次 B 样条拟合函数为

时间基函数求解时域积分方程。区间 B 样条小波 分析的去噪效果好于 Fourier 分析,多应用于探地雷 达和频率域电磁法中<sup>[21-22]</sup>。Peng 等<sup>[23]</sup>采用 B 样条 门控抑制瞬变电磁法数据中的极低频噪声。

本文以垂直磁偶源和圆形回线源为例,对于不同地电模型,通过对比时间域电磁响应的数值解和 解析解来验证高次 B 样条插值的效果。

1 方法原理

如图 1 所示,基于高次 B 样条插值的瞬变电磁 一维正演有 3 个步骤:第一步依据磁场频率域的解 析式显式计算数十个频点的响应;第二步采用 B 样 条插值函数代替传统三次样条插值函数,将数十个 频点的磁场频率域响应扩展至正弦和余弦变换所需 的数百个频点的磁场频率域响应;第三步采用正弦 和余弦变换获得磁场脉冲响应。

#### 1.1 频率域响应

在准静态近似条件下,垂直磁偶源和圆形回线 源在均匀半空间表面激发的频率域磁场垂直分量解 析式分别为:

$$H_{z-\text{dipole}} = \frac{m}{2\pi k^2 \rho^5} [9 - (9 + 9ik\rho - 4k^2 \rho^2 - ik^3 \rho^3) e^{-ik\rho}], \qquad (1)$$

$$H_{z-\text{loop}} = -\frac{I}{k^2 a^3} [3 - (3 + 3ika - k^2 a^2) e^{-ika}] , \quad (2)$$

其中:i 为复数单位;  $k^2 = -i\mu\sigma\omega$ ;  $\mu$  和  $\sigma$  为均匀半 空间的磁导率和电导率;  $\omega$  为角频率,  $\omega = 2\pi f$ ; f 为 频率。式(1)中 m 为磁矩;  $\pi$  为圆周率;  $\rho$  为收发距;



图 1 瞬变电磁法一维正演技术路线

Fig. 1 1D forward modeling technology roadmap for transient electromagnetic methods

式(2)中I为发射电流强度;a为圆形回线半径。

#### 1.2 B 样条插值函数

条插值函数形式为:

由于本文采用了 Key 研发的 201 个系数的正弦 和余弦变换<sup>[9]</sup>,需将上述显式计算的数十个频点的 磁场频率域响应 H<sub>2</sub>(f1) 采用高次 B 样条插值函数 扩展至 201 个频点的磁场频率域响应 H<sub>2</sub>(f) 。B 样

$$\tilde{H}_{z}(f) = \sum_{j=1}^{n} N_{j,k}(f) H_{z}(f1)_{j} , \qquad (3)$$

其中:  $N_{j,k}(f)$  为 B 样条基函数; j 为变量, 取 0  $\leq j \leq n$ ; k 为 B 样条的幂次。基函数满足递归公式:

$$N_{j,k}(f) = \frac{f - f\mathbf{l}_j}{f\mathbf{l}_{j+k} - f\mathbf{l}_j} N_{j,k-1}(f) + \frac{f\mathbf{l}_{j+k+1} - f}{f\mathbf{l}_{j+k+1} - f\mathbf{l}_{j+1}} N_{j+1,k-1}(f) , \qquad (4)$$

$$N_{j,0}(f) = \begin{cases} 1, fl_{j} \leq f \leq fl_{j+1} \\ 0, 其他 \end{cases}$$
(5)

#### 1.3 时间域响应

将 201 个频点的磁场频率域响应通过正弦变换 得到磁场脉冲响应数值解:

$$\partial h_z(t) / \partial t = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[ \tilde{H}_z(f) \right] \sin(\omega t) \, \mathrm{d}\omega \, , \, (6)$$

为了验证高次 B 样条插值效果,将上式得到的 数值解与以下垂直磁偶源磁场脉冲响应的解析解 (式(7))或圆形回线中心的磁场脉冲响应的解析解 (式(8))对比。

$$\partial h_z / \partial t(t) = \frac{m}{2\pi\mu\sigma\rho^5} \cdot \left[9f_{er}(\theta\rho) - \frac{2\theta\rho}{\pi^{1/2}}(9 + 6\theta^2\rho^2 + 4\theta^4\rho^4) e^{-\theta^2\rho^2}\right], (7)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t(t)} = -\frac{1}{\mu\sigma a^3} \cdot \left[3f_{er}(\theta a) - \frac{2\theta a}{\pi^{1/2}}(3 + 2\theta^2 a^2) e^{-\theta^2 a^2}\right], \quad (8)$$

其中: $f_{er}$ 表示误差函数,  $\theta = \left(\frac{\mu\sigma}{4t}\right)^{1/2}$ ;式(7)中其余变量含义与式(1)一致,式(8)中其余变量含义与式(2)一致。

#### 2 算法验证

本文以垂直磁偶源和圆形回线源为例,验证高

次 B 样条插值的效果。验证过程中用到 3 个评价 标准:相对误差、最大相对误差和平均误差率,单位 都为%。其中平均误差率是描述整个时间序列相对 误差的一个量, n 为时刻的数目。

相对误差 = 100% × 
$$\frac{\partial h_z / \partial t(t)}{\partial h_z / \partial t(t)} = \frac{\partial h_z / \partial t(t)}{\partial h_z / \partial t(t)}$$
,

平均误差率 =  

$$\frac{100}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial h_z / \partial t(t)_{\underline{w}\underline{f}\underline{f}\underline{f}\underline{f}\underline{f}}}{\partial h_z / \partial t(t)_{\underline{g}\underline{f}\underline{f}\underline{f}\underline{f}\underline{f}\underline{f}}} \right|_{\circ} (10)$$

设置观测时间序列共含 30 个时刻,其范围在  $10^{-5} \sim 10^{-1}$  s。通过试错法划定不同样条插值函数所 需要的频率范围,传统三次样条频率范围为  $2\pi \times 10^{-1} \sim 2\pi \times 10^8$  Hz,三次 B 样条频率范围为  $2\pi \times 10^{-2} \sim 2\pi \times 10^7$  Hz,高次 B 样条频率范围统一划定为  $2\pi \times 10^{-3} \sim 2\pi \times 10^{13}$  Hz,每数量级的频点均为 5。

#### 2.1 垂直磁偶源

定义垂直磁偶源具有单位磁矩,收发距为100 m,均匀半空间电阻率为1000Ω·m。将图2a中垂 直磁偶源的磁场频率域响应分别采用传统三次样条 和三次B样条插值扩展,经正弦变换得到的磁场脉 冲响应数值解都与解析解吻合良好。其中基于三次 B样条插值和传统三次样条插值的最大相对误差均 小于1.1%(图2b),基于五次B样条插值的最大相对误差小于0.06%(图2c),基于七次B样条插值的最大相对误差小于0.01%(图2d)。结果表明,垂直 磁偶源位于1000Ω·m均匀半空间时,三次B样 条和传统三次样条插值效果一致,五次和七次B样 条插值效果远优于传统三次样条。同频点下,随着 B样条阶次变高,最大相对误差减小,插值效果更 优。

为探讨高次 B 样条的一般规律,给其阶次和每 数量级频点的选择提供依据,在表1给出了垂直磁 偶源位于1000 Ω · m 均匀半空间时,不同阶次 B 样条插值在每数量级不同频点情况下,正演计算产 生的平均误差率,表2给出了最大相对误差。从整 体上来看,平均误差率和最大相对误差都随着每数 量级频点和 B 样条阶次的增加而减小。但该变化 并不是线性的,例如七次 B 样条在每数量级频点为 6 时,其数值解的尾部出现了严重的震荡,导致平均 误差率为265%,远大于附近频点和附近阶次 B 样 条的平均误差率。经过分析,这种情况下 B 样条插 值所需的约束范围更大,也就是所需的频率范围更 大,而此时增大频率范围会导致划分的频点数过多,



a—三次 B 样条数值解;b—三次 B 样条相对误差曲线;c—五次 B 样条相对误差曲线;d—七次 B 样条相对误差曲线 a—cubic B-spline numerical solution;b—cubic B-spline relative error curve;c—quintic B-spline relative error curve;d—heptatic B-spline relative error curve

# 图 2 每数量级 5 个频点计算条件下垂直磁偶源位于 1 000 Ω · m 均匀半空间表面激发的磁场脉冲响应 Fig. 2 The magnetic field impulse response excited by vertical magnetic dipole source on the surface of 1 000 Ω · m homogeneous half-space on the condition of 5 frequencies per decade

影响正演效率,因此在选择插值方法时应当避开这些情况。因正演其他环节也会引起误差,且数值解与解析解本身存在一定的误差,经测试,平均误差率达到 0.000 1%附近后不会再大幅减小。

验证 B 样条插值算法时也应考虑均匀半空间 为低阻的极限情况,设置其电阻率为1Ω·m,其余 参数与电阻率为1000Ω·m时一致。图3a中的磁 场脉冲响应数值解与解析解吻合良好。其中基于三

表1	垂直	磁偶源位	于1000	$\Omega \cdot m$	均匀半	空间时不同	司插值	ī算法产	生的平	均误	差率
Tab	le 1	Average	error rat	te of d	ifferent	interpolati	on als	gorithm	s for a	verti	cal

magnetic dipole source in a 1000  $\Omega \cdot m$  uniform half-space

长齿莺斗	平均误差率/%								
佃阻异広	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	9.08×10 <sup>-1</sup>	5.27×10 <sup>-1</sup>	3.75×10 <sup>-1</sup>	$2.60 \times 10^{-1}$	$3.21 \times 10^{-1}$	2.19×10 <sup>-1</sup>			
三次 B 样条	9. 11×10 <sup>-1</sup>	5.54×10 <sup>-1</sup>	3.68×10 <sup>-1</sup>	2.70×10 <sup>-1</sup>	3. $10 \times 10^{-1}$	2. $17 \times 10^{-1}$			
四次 B 样条	7. $20 \times 10^{-1}$	$4.02 \times 10^3$	$1.50 \times 10^{2}$	$1.00 \times 10^{1}$	$6.22 \times 10^{-2}$	$3.01 \times 10^{-2}$			
五次 B 样条	6. 53×10 <sup>-2</sup>	$2.74 \times 10^{-2}$	$1.28 \times 10^{-2}$	$3.70 \times 10^{-2}$	5.71	6. 31×10 <sup>1</sup>			
六次 B 样条	$1.03 \times 10^{3}$	5.61×10 <sup>-1</sup>	4. $46 \times 10^{-3}$	$2.03 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-3}$	$1.29 \times 10^{-3}$			
七次 B 样条	$1.53 \times 10^{-2}$	$4.22 \times 10^{-3}$	2.65×10 <sup>2</sup>	1.15	$3.47 \times 10^{-4}$	$3.64 \times 10^{-4}$			
八次 B 样条	$4.03 \times 10^{1}$	1.26	9.43×10 <sup>-4</sup>	2. $16 \times 10^{-2}$	$1.08 \times 10^{3}$	1.53			
九次 B 样条	4.13	$1.81 \times 10^{-3}$	2. $57 \times 10^{1}$	$3.72 \times 10^{-3}$	2. $52 \times 10^{-4}$	2.89×10 <sup>-4</sup>			

		magnetic dipole source in a 1000 $\Omega$ $\cdot$ m uniform half-space
Table	2	Maximum relative error of different interpolation algorithms for a vertical
表 2	垂	直磁偶源位于 1000 $\Omega \cdot \mathbf{m}$ 均匀半空间时不同插值算法产生的最大相对误差

长齿管注	最大相对误差/%								
加但异伝	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	1.81	1.09	7. $24 \times 10^{-1}$	4.57×10 <sup>-1</sup>	6. 98×10 <sup>-1</sup>	8.82×10 <sup>-1</sup>			
三次 B 样条	1.93	1.06	6. 89×10 <sup>-1</sup>	5.50×10 <sup>-1</sup>	6.66×10 <sup>-1</sup>	9.21×10 <sup>-1</sup>			
四次 B 样条	1.38	2.60×10 <sup>4</sup>	1. $59 \times 10^3$	$1.12 \times 10^{2}$	6.56×10 <sup>-1</sup>	$1.26 \times 10^{-1}$			
五次 B 样条	$1.31 \times 10^{-1}$	5.60×10 <sup>-2</sup>	2. $50 \times 10^{-2}$	$1.01 \times 10^{-1}$	2. $17 \times 10^{1}$	$5.25 \times 10^{2}$			
六次 B 样条	5. $19 \times 10^3$	7.74	3. $39 \times 10^{-2}$	$1.17 \times 10^{-2}$	9.84×10 <sup>-3</sup>	6.47×10 <sup>-3</sup>			
七次 B 样条	9. $31 \times 10^{-2}$	$1.08 \times 10^{-2}$	2. $36 \times 10^3$	$1.35 \times 10^{1}$	$1.62 \times 10^{-3}$	$1.81 \times 10^{-3}$			
八次 B 样条	$1.48 \times 10^{2}$	$1.82 \times 10^{1}$	$1.47 \times 10^{-2}$	5.29×10 <sup>-2</sup>	9. $53 \times 10^3$	$1.36 \times 10^{1}$			
九次 B 样条	4.77×10 <sup>1</sup>	8.67×10 <sup>-3</sup>	$1.62 \times 10^2$	$4.68 \times 10^{-2}$	5.12×10 <sup>-3</sup>	$2.08 \times 10^{-3}$			

次 B 样条插值和传统三次样条插值的最大相对误 差小于 4.2%(图 3b),基于五次 B 样条插值的最大 相对误差小于 0.5%(图 3c),基于七次 B 样条插值 的最大相对误差小于 0.4%(图 3d),五次 B 样条和 七次 B 样条插值效果差距不大。在图 3a 中 0.002 s 附近,垂直磁场变号,脉冲响应正负反转,导致样条 插值在此处相对误差较大。结果表明:垂直磁偶源 位于1Ω·m均匀半空间时,拟合难度较大,高次 B 样条插值效果差于均匀半空间电阻率为1000Ω· m的情况。





curve

图 3 每数量级 5 个频点计算条件下垂直磁偶源位于 1 Ω · m 均匀半空间表面激发的磁场脉冲响应

Fig. 3 The magnetic field impulse response excited by the vertical magnetic dipole source on the

surface of 1  $\Omega$   $\cdot$  m homogeneous half-space on the condition of 5 frequencies per decade

表 3 给出了垂直磁偶源位于 1 Ω · m 均匀半空 间时,不同阶次 B 样条插值在每数量级不同频点的 情况下,正演计算产生的平均误差率,表 4 给出了最 大相对误差。整体来看,在每数量级频点不大于 6 时,B 样条插值效果差于均匀半空间电阻率为 1 000 Ω · m 的情况;每数量级频点大于 6 后,情况相反。 因此在脉冲响应存在正负反转时,可以适当增加频 点以提高 B 样条插值效果。

分析不同阶次的 B 样条插值的结果,为实现瞬

变电磁响应的精确计算,本文划定样条插值的平均 误差率需小于0.1%,最大相对误差需小于1%。对 于垂直磁偶源,满足条件的高次 B 样条有每数量级 频点为5时,阶次为五次、七次和九次;每数量级频 点为6时,阶次为五次、六次和八次;每数量级频点 为7时,阶次为五次、六次、八次和九次;每数量级频 点为8时,阶次为四次、六次、七次和九次;每数量级 频点为9时,阶次为四次、六次、七次和九次。

表 3 垂直磁偶源位于	$\cdot 1 \Omega$	•m 均匀半空间时不同插值算法产生的半均误差率
-------------	------------------	-------------------------

Table 3 Average error rate of different interpolation algorithms for a vertical

magnetic	dipole	source	in	a 1	Ω	•	m	uniform	half-sp	ace
----------	--------	--------	----	-----	---	---	---	---------	---------	-----

话店管注	平均误差率/%								
田田井仏	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	1.71	5.59×10 <sup>-1</sup>	3. 11×10 <sup>-1</sup>	$1.82 \times 10^{-1}$	5.64×10 <sup>-2</sup>	5.69×10 <sup>-2</sup>			
三次 B 样条	$1.21 \times 10^{1}$	7.83 $\times 10^{-1}$	3. 16×10 <sup>-1</sup>	$1.49 \times 10^{-1}$	7.80×10 <sup>-2</sup>	5.66×10 <sup>-2</sup>			
四次 B 样条	4. $76 \times 10^{-1}$	8.95	7.80×10 <sup>-1</sup>	$1.03 \times 10^{-1}$	2. $40 \times 10^{-2}$	$1.42 \times 10^{-2}$			
五次 B 样条	1.02	7.57×10 <sup>-2</sup>	3. $21 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-2}$	$1.07 \times 10^{-2}$	4.93×10 <sup>-2</sup>			
六次 B 样条	4.31×10 <sup>1</sup>	1.08	3. 12×10 <sup>-2</sup>	5.84×10 <sup>-3</sup>	$1.36 \times 10^{-3}$	9.76×10 <sup>-4</sup>			
七次 B 样条	1.55	$5.09 \times 10^{-2}$	1.33	2. $11 \times 10^{-2}$	8.84×10 <sup>-4</sup>	$3.44 \times 10^{-4}$			
八次 B 样条	3.54	8.14×10 <sup>-1</sup>	$1.09 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-3}$	6.33×10 <sup>-2</sup>	4.56×10 <sup>-4</sup>			
九次 B 样条	8.00	$3.74 \times 10^{-2}$	2.78×10 <sup>-1</sup>	$1.13 \times 10^{-3}$	2. $54 \times 10^{-4}$	$4.82 \times 10^{-5}$			

表 4 垂直磁偶源位于1Ω·m 均匀半空间时不同插值算法产生的最大相对误差

Table 4 Maximum relative error of different interpolation algorithms for a

vertical magnetic dipole source in a 1  $\Omega\cdot$  m uniform half-space

长店質法	最大相对误差/%								
细祖异伝	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	4.85	3.49	2.63	1.37	2.35×10 <sup>-1</sup>	$3.78 \times 10^{-1}$			
三次 B 样条	$1.08 \times 10^{2}$	4.13	2.32	1.54	4. $11 \times 10^{-1}$	$3.30 \times 10^{-1}$			
四次 B 样条	3.87	$1.32 \times 10^{2}$	8.80	6.70×10 <sup>-1</sup>	$1.80 \times 10^{-1}$	9.19×10 <sup>-2</sup>			
五次 B 样条	3.60	4.80×10 <sup>-1</sup>	$2.02 \times 10^{-1}$	$1.45 \times 10^{-1}$	8.59×10 <sup>-2</sup>	5.62×10 <sup>-1</sup>			
六次 B 样条	6. $46 \times 10^2$	8.81	$1.80 \times 10^{-1}$	6.33×10 <sup>-2</sup>	8.03×10 <sup>-3</sup>	9. $17 \times 10^{-3}$			
七次 B 样条	8.70	3.74×10 <sup>-1</sup>	$1.72 \times 10^{1}$	$1.62 \times 10^{-1}$	6. 13×10 <sup>-3</sup>	$3.09 \times 10^{-3}$			
八次 B 样条	4.44×10 <sup>1</sup>	6.69	3.85×10 <sup>-2</sup>	7.31×10 <sup>-3</sup>	8.12×10 <sup>-1</sup>	$3.63 \times 10^{-3}$			
九次 B 样条	$8.02 \times 10^{1}$	$1.72 \times 10^{-1}$	3.32	$3.87 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-3}$	2.44×10 <sup>-4</sup>			

#### 2.2 圆形回线

圆形回线的参数设置如下:定义发射电流为1 A,回线半径为50m,均匀半空间电阻率为1000Ω ·m,测点位于回线中心。将图4a中圆形回线中心 磁场频率域响应分别采用传统三次样条和三次B 样条插值扩展,经正弦变换得到的磁场脉冲响应数 值解都与解析解吻合良好。其中基于传统三次样条 插值的最大相对误差小于1.1%(图4b),基于三次 B样条插值的最大相对误差小于2.9%(图4b),基 于五次B样条插值的最大相对误差小于0.13%(图 4c),基于七次B样条插值的最大相对误差小于 0.15%(图4d)。基于七次B样条插值的晚期2个 时刻相对误差较大,而其余时刻相对误差优于五次 B 样条。结果表明,圆形回线置于1000 Ω · m 均匀 半空间时,传统三次样条插值效果较好,而随着 B 样条阶次变高,B 样条插值的相对误差迅速下降,其 插值效果反超传统三次样条。

表 5 给出了圆形回线置于 1 000 Ω · m 均匀半 空间时,不同阶次 B 样条插值在每数量级不同频点 的情况下,正演计算产生的平均误差率,表 6 则给出 了最大相对误差。除每数量级频点为 8 的情况,传 统三次样条随着频点增加,平均误差率逐步降低,较 为稳定。而高次 B 样条平均误差率的变化规律不 稳定。但是传统三次样条平均误差率始终大于 0.1%,高次 B 样条插值算法的平均误差率可以达到 0.005%,插值效果更好。



a—三次 B 样条数值解;b—三次 B 样条相对误差曲线;c—五次 B 样条相对误差曲线;d—七次 B 样条相对误差曲线 a—cubic B-spline numerical solution;b—cubic B-spline relative error curve;c—quintic B-spline relative error curve;d—heptatic B-spline relative error curve

#### 图 4 每数量级 5 个频点计算条件下圆形回线位于 1 000 Ω · m 均匀半空间表面激发的磁场脉冲响应

#### Fig. 4 The impulse response of magnetic field excited by circular loop on the surface of

1 000  $\Omega$   $\cdot$  m homogeneous half-space on the condition of 5 frequencied per decade

#### 表 5 圆形回线位于 1000 Ω · m 均匀半空间时不同插值算法产生的平均误差率

Table 5	Average error rate of	f different interpolation	1 algorithms for	r circular loo	ps in 1 000 $\Omega$	• m uniform half-space

话店質法	平均误差率/%								
畑山弁仏	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	9. $04 \times 10^{-1}$	5.41×10 <sup>-1</sup>	$3.73 \times 10^{-1}$	3.18×10 <sup>-1</sup>	$4.41 \times 10^{-1}$	$1.86 \times 10^{-1}$			
三次 B 样条	1.41	9.90×10 <sup>-1</sup>	8. $59 \times 10^{-1}$	$7.32 \times 10^{-1}$	8.65×10 <sup>-1</sup>	7.36×10 <sup>-1</sup>			
四次 B 样条	2.83	6. $24 \times 10^3$	2. $21 \times 10^3$	$1.28 \times 10^{2}$	2.92	$4.89 \times 10^{-2}$			
五次 B 样条	5.75×10 <sup>-2</sup>	2.77×10 <sup>-2</sup>	$1.59 \times 10^{-2}$	4.41×10 <sup>-1</sup>	$3.23 \times 10^2$	$7.69 \times 10^4$			
六次 B 样条	$4.25 \times 10^{3}$	7.34	8. $54 \times 10^{-3}$	$3.98 \times 10^{-3}$	$1.36 \times 10^{-2}$	$4.44 \times 10^{-3}$			
七次 B 样条	$1.99 \times 10^{-2}$	$1.19 \times 10^{-2}$	3. $45 \times 10^3$	$1.54 \times 10^{1}$	9.40×10 <sup>-3</sup>	4. $12 \times 10^{-3}$			
八次 B 样条	7.38×10 <sup>1</sup>	$1.96 \times 10^{1}$	5. $72 \times 10^{-3}$	2.44×10 <sup>-1</sup>	7.07×10 <sup>4</sup>	3.71×10 <sup>1</sup>			
九次 B 样条	6.33	$1.29 \times 10^{-2}$	4. $33 \times 10^2$	4.77×10 <sup>-2</sup>	$1.32 \times 10^{-2}$	$5.25 \times 10^{-3}$			

设置均匀半空间电阻率为1Ω·m,其余参数与 1000Ω·m时一致。图5a中的磁场脉冲响应数值 解与解析解吻合良好。其中基于三次B样条插值 和传统三次样条插值的最大相对误差小于1%(图 5b),基于五次B样条插值的最大相对误差小于 0.05%(图 5c),基于七次 B 样条插值的最大相对误 差小于 0.03%(图 5d)。基于三次 B 样条和传统三 次样条插值的相对误差较大的区域位于衰减过渡期 和晚期阶段,而高次 B 样条插值在这一段区域相对 误差很小。

#### 表 6 圆形回线位于 1000 $\Omega \cdot \mathbf{m}$ 均匀半空间时不同插值算法产生的最大相对误差 Table 6 Maximum relative error of different interpolation algorithms for circular loops in 1 000 $\Omega$ · m uniform half-space 最大相对误差/% 插值算法 4 频点 5 频点 6 频点 7 频点 8 频点 9 频点 传统三次样条 2.57 1.02 7.66 $\times 10^{-1}$ 5.90 $\times 10^{-1}$ 1.75 4.51 $\times 10^{-1}$ 三次 B 样条 7.46 2.82 2.86 2.92 2.41 2.47 四次 B 样条 5.16 $4.05 \times 10^{4}$ 2.36 $\times 10^4$ $1.46 \times 10^{3}$ 5.07 $\times 10^{1}$ $4.04 \times 10^{-1}$ 五次 B 样条 $1.07 \times 10^{-1}$ 7.81×10<sup>-2</sup> 9.37 $\times 10^{-1}$ $1.17 \times 10^{-1}$ $1.34 \times 10^{3}$ $4.66 \times 10^{5}$ 六次 B 样条 8. $01 \times 10^{-2}$ 7.54 $\times 10^{-2}$ 2.28×10<sup>-1</sup> 4.39 $\times 10^{-2}$ $2.06 \times 10^4$ 7.51 $\times$ 10<sup>1</sup> 七次 B 样条 $1.93 \times 10^{-1}$ $3.00 \times 10^4$ $1.92 \times 10^{2}$ 4.46 $\times 10^{-2}$ $1.35 \times 10^{-1}$ $1.62 \times 10^{-1}$ 八次 B 样条 $2.92 \times 10^{2}$ $1.98 \times 10^{2}$ 7.46 $\times 10^{-2}$ 4.25 $\times 10^{-1}$ 6.04 $\times 10^{5}$ $4.61 \times 10^{2}$ 九次 B 样条 $7.23 \times 10^{1}$ $1.00 \times 10^{-1}$ 5.02 $\times 10^{3}$ 7.35 $\times 10^{-1}$ 2.34×10<sup>-1</sup> 4. $21 \times 10^{-2}$



a—三次 B 样条数值解;b—三次 B 样条相对误差曲线;c—五次 B 样条相对误差曲线;d—七次 B 样条相对误差曲线 a—cubic B-spline numerical solution;b—cubic B-spline relative error curve;c—quintic B-spline relative error curve;d—heptatic B-spline relative error curve

图 5 每数量级 5 频点计算条件下圆形回线位于 1 Ω · m 均匀半空间表面激发的磁场脉冲响应
 Fig. 5 The impulse response of magnetic field excited by circular loop on the surface of 1 Ω · m homogeneous half-space on the condition of 5 frequencies per decade

表 7 给出了圆形回线置于 1 Ω · m 均匀半空间 时,不同阶次 B 样条插值在每数量级不同频点的情 况下,正演计算产生的平均误差率,表 8 则给出了最 大相对误差。发射源为圆形回线时,位于 1 Ω · m 均匀半空间中 B 样条插值的效果要比位于 1 000 Ω •m 均匀半空间中好。且在 1 Ω •m 均匀半空间中 高次 B 样条插值的平均误差率随频点和阶次增加 而稳定减小。 表 7 圆形回线位于 1 Ω · m 均匀半空间时不同插值算法产生的平均误差率

Table 7 Average error rate of different interpolation algorithms for circular loops in 1  $\Omega$  · m uniform half-space

话估管法			平均误	差率/%		
油胆异体	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点
传统三次样条	6. 14×10 <sup>-1</sup>	$3.23 \times 10^{-1}$	2.07×10 <sup>-1</sup>	$1.26 \times 10^{-1}$	$1.21 \times 10^{-1}$	5.65×10 <sup>-2</sup>
三次 B 样条	1.02	3.55×10 <sup>-1</sup>	$1.96 \times 10^{-1}$	$1.26 \times 10^{-1}$	$1.17 \times 10^{-1}$	5.67×10 <sup>-2</sup>
四次 B 样条	$1.45 \times 10^{-1}$	2.81×10 <sup>-1</sup>	4. $03 \times 10^{-2}$	2.19×10 <sup>-2</sup>	$1.70 \times 10^{-2}$	7.16×10 <sup>-3</sup>
五次 B 样条	$1.75 \times 10^{-1}$	2.46×10 <sup>-2</sup>	$1.05 \times 10^{-2}$	$4.96 \times 10^{-3}$	6.48×10 <sup>-3</sup>	7.58×10 <sup>-2</sup>
六次 B 样条	2.07	4.60×10 <sup>-2</sup>	4. $76 \times 10^{-3}$	$1.42 \times 10^{-3}$	7.26×10 <sup>-4</sup>	2. $12 \times 10^{-4}$
七次 B 样条	$1.84 \times 10^{-1}$	6.60×10 <sup>-3</sup>	$1.54 \times 10^{-2}$	$1.62 \times 10^{-3}$	$2.52 \times 10^{-4}$	6.78×10 <sup>-5</sup>
八次 B 样条	$1.15 \times 10^{-1}$	$3.40 \times 10^{-2}$	$1.22 \times 10^{-3}$	2.43×10 <sup>-4</sup>	5.44 $\times 10^{-2}$	$3.00 \times 10^{-5}$
九次 B 样条	$3.25 \times 10^{-1}$	5.25×10 <sup>-3</sup>	8. 17×10 <sup>-4</sup>	4. 29×10 <sup>-4</sup>	4. $50 \times 10^{-5}$	$1.08 \times 10^{-5}$

表 8 圆形回线位于1Ω·m 均匀半空间时不同插值算法产生的最大相对误差

Table 8 Maximum relative error of different interpolation algorithms for circular loops in 1  $\Omega \cdot m$  uniform half-space

压估管注	最大相对误差/%								
油但并伝	4 频点	5 频点	6 频点	7 频点	8 频点	9 频点			
传统三次样条	1.88	9.94×10 <sup>-1</sup>	6.83×10 <sup>-1</sup>	4. $15 \times 10^{-1}$	$5.90 \times 10^{-1}$	2.82×10 <sup>-1</sup>			
三次 B 样条	5.34	1.03	7. $21 \times 10^{-1}$	4.86×10 <sup>-1</sup>	5.75 $\times 10^{-1}$	2.50×10 <sup>-1</sup>			
四次 B 样条	3. $57 \times 10^{-1}$	3.29	$1.09 \times 10^{-1}$	5.52×10 <sup>-2</sup>	6. $24 \times 10^{-2}$	3. $16 \times 10^{-2}$			
五次 B 样条	6.67×10 <sup>-1</sup>	5. $16 \times 10^{-2}$	2. $52 \times 10^{-2}$	$1.02 \times 10^{-2}$	6.00×10 <sup>-2</sup>	8.42×10 <sup>-1</sup>			
六次 B 样条	2.65×10 <sup>1</sup>	$3.43 \times 10^{-1}$	$1.40 \times 10^{-2}$	2.55×10 <sup>-3</sup>	$2.22 \times 10^{-3}$	9.95×10 <sup>-4</sup>			
七次 B 样条	1.16	2.72×10 <sup>-2</sup>	$1.81 \times 10^{-1}$	$1.07 \times 10^{-2}$	5. $10 \times 10^{-4}$	$2.07 \times 10^{-4}$			
八次 B 样条	1.15	$2.93 \times 10^{-1}$	7. $41 \times 10^{-3}$	$1.08 \times 10^{-3}$	6.67×10 <sup>-1</sup>	$8.09 \times 10^{-5}$			
九次 B 样条	3.41	$3.01 \times 10^{-2}$	5. $73 \times 10^{-3}$	$1.91 \times 10^{-3}$	$1.64 \times 10^{-4}$	$3.27 \times 10^{-5}$			

对于圆形回线源,满足本文划定精确计算要求 的高次 B 样条有每数量级频点为 5 时,阶次为五 次、七次和九次;每数量级频点为 6 时,阶次为五次、 六次和八次;每数量级频点为 7 时,阶次为六次和九 次;每数量级频点为 8 时,阶次为六次、七次和九次;每 数量级频点为 9 时,阶次为四次、六次、七次和九次。

综合 2 种发射源布置在不同地电模型的结果来 看,高次 B 样条的平均误差率和最大相对误差随频 点的变化不稳定,但是经过对比,满足瞬变电磁响应 精确计算的几种插值算法所需频点和阶次是固定 的。归纳总结的结果满足本文划定精确计算要求, 且适用于不同发射源的高次 B 样条插值算法。归 纳结果与圆形回线源划定的高次 B 样条一致,此处 不再复述。在兼顾瞬变电磁响应高精度计算要求和 正演效率的前提下,选择五次、七次或九次 B 样条 在每数量级频点为 5 时插值最合理,此时频点划分 个数为 81。九次 B 样条在每数量级频点为 9 时进 行插值的平均误差率和最大相对误差最小,之后再 增加阶次和频点,误差也不会大幅减小,推测此时一 维正演其他环节引起的误差掩盖了 B 样条阶次和 频点继续增加所带来的误差变化。

3 结论

本文将高次 B 样条插值应用瞬变电磁法一维

正演中,并以垂直磁偶源和圆形回线源为例,验证了 算法的准确性。数值结果表明,对于多个地电模型, 基于高次 B 样条插值计算的瞬变电磁响应精度均 优于基于传统三次样条的计算结果。其中五次、七 次或九次 B 样条在每数量级频点为 5 时插值效果 既满足瞬变电磁响应高精度计算的要求,又可以兼 顾正演效率。

#### 参考文献(References):

- [1] 李建慧,曹晓峰,凌成鹏,等. 瞬变电磁法勘探的地电模型及其成功案例分析[J]. 地球物理学进展,2016,31(1):232-250.
  Li J H, Cao X F, Ling C P, et al. Geoelectric models and their corresponding successful cases for transient electromagnetic prospecting[J]. Progress in Geophysics, 2016, 31(1):232-250.
- [2] Zeng S H, Hu X Y, Li J H, et al. Effects of full transmitting-current waveforms on transient electromagnetics: Insights from modeling the Albany graphite deposit [J]. Geophysics, 2019, 84 (4): E255 – E268.
- [3] Porsani J L, Bortolozo C A, Almeida E R, et al. TDEM survey in urban environmental for hydrogeological study at USP campus in So Paulo city, Brazil [J]. Journal of Applied Geophysics, 2012, 76: 102–108.
- [4] 李建慧,朱自强,曾思红,等. 瞬变电磁法正演计算进展[J].地 球物理学进展,2012,27(4):1393-1400.
  Li J H,Zhu Z Q,Zeng S H,et al. Progress of forward computation in transient electromagnetic method [J]. Progress in Geophysics, 2012,27(4):1393-1400.
- [5] 邢涛,袁伟,李建慧. 回线源瞬变电磁法的一维 Occam 反演

5 期

[J]. 物探与化探, 2021, 45(5): 1320-1328.

Xing T, Yuan W, Li J H. One-dimensional Occam 's inversion for transient electromagnetic data excited by a loop source [J]. Geo-physical and Geochemical Exploration, 2021, 45(5); 1320–1328.

- [6] Ghosh D P. The application of linear filter theory to the direct interpretation of geoelectrical resistivity sounding measurements[J].
   Geophysical Prospecting, 1971, 19(2):192-217.
- [7] Anderson W L. Computer program numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering
   [J]. Geophysics, 1979, 44(7):1287–1305.
- [8] Chave A D. Numerical integration of related Hankel transforms by quadrature and continued fraction expansion [J]. Geophysics, 1983,48(12):1671-1686.
- [9] Key K. Is the fast Hankel transform faster than quadrature? [J]. Geophysics, 2012, 77(3): F21-F30.
- [10] Anderson W L. Fourier cosine and sine transforms using lagged convolutions in double-precision(subprograms DLAGF0/DLAGF1) [R]. U S Geological Survey, 1983.
- [11] Anderson W L. A hybrid fast Hankel transform algorithm for electromagnetic modeling[J]. Geophysics, 1989, 54(2):263-266.
- [12] Knight J H, Raiche A P. Transient electromagnetic calculations using the Gaver-Stehfest inverse Laplace transform method[J]. Geophysics, 1982, 47(1):47-50.
- [13] Li J H, Farquharson C G, Hu X Y. Three effective inverse Laplace transform algorithms for computing time-domain electromagnetic responses [J]. Geophysics, 2016, 81(2):E113-E128.
- [14] Schoenberg I J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, 4:45-99.
- [15] Boor C D. On calculating with B-splines [J]. Journal of Approximation Theory, 1972, 6(1):50-62.

- [16] Cox M G. The Numerical evaluation of B-splines [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1972, 10(2):134-149.
- [17] 王增波,彭仁忠,宫兆刚. B 样条曲线生成原理及实现[J]. 石 河子大学学报:自然科学版,2009,27(1):118-121.
  Wang Z B, Peng R Z, Gong Z G. The creating principle and realization of B-spline curve[J]. Journal of Shihezi University: Natural Science, 2009,27(1):118-121.
- [18] Inoue H. A least-squares smooth fitting for irregularly spaced data: Finite-element approach using the cubic B-spline basis [J]. Geophysics, 1986,51(11):2051-2066.
- [19] 李貅,全红娟,许阿祥,等. 瞬变电磁测深的微分电导成像[J]. 煤田地质与勘探,2003,31(3):59-61.
  Li X,Quan H J,Xu A X, et al. Differential coefficient imaging of the longitudinal conductance in the transient electromagnetic sounding [J]. Coal Geology & Exploration,2003,31(3):59-61.
- [20] Wang P, Xia M Y, Jin J M, et al. Time-domain integral equation solvers using quadratic B-spline temporal basis functions [J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2007, 49 (5): 1154 – 1159.
- [21] 冯德山,王珣. 区间 B 样条小波有限元 GPR 模拟双相随机混凝土介质[J]. 地球物理学报,2016,59(8):3098-3109.
  Feng D S, Wang X. The GPR simulation of bi-phase random concrete medium using finite element of B-spline wavelet on the interval[J]. Chinese Journal of Geophysics,2016,59(8):3098-3109.
- [22] Gao L Q, Yin C C, Wang N, et al. 3D Wavelet finite-element modeling of frequency-domain airborne EM data based on B-spline wavelet on the interval using potentials [J]. Remote Sensing, 2021, 13(17):3463.
- [23] Peng C, Zhu K G, Fan T J, et al. Suppressing the very low-frequency noise by B-spline gating of transient electromagnetic data [J]. Journal of Geophysics and Engineering, 2022, 19(4):761-774.

## One-dimensional accurate calculation of transient electromagnetic responses based on B-spline interpolation

#### XING Tao<sup>1</sup>, WANG Yao<sup>2</sup>, LI Jian-Hui<sup>2,3</sup>

(1. Beijing Tanchuang Resources Technology Co., Ltd., Beijing 100071, China; 2. School of Geophysics and Geomatics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan 430074, China; 3. State Key Laboratory of Geological Processes and Mineral Resources, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan 430074, China; 3.

Abstract: In the one-dimensional (1D) forward modeling of transient electromagnetic (TEM) responses based on spectral methods, multiple calculation steps significantly influence the calculation accuracy of TEM responses. To improve the efficiency of 1D forward modeling, the common practice is to directly calculate the frequency-domain electromagnetic responses of dozens of frequency points and then obtain the responses of hundreds of frequency points through cubic spline interpolation. Although the numerical results calculated using the cubic spline interpolation function can meet the requirements of most forward modeling scenarios, their accuracy can be further improved. This study introduced high-order B-spline interpolation into the 1D forward modeling of TEM responses to replace the conventional cubic spline interpolation and verified the accuracy of the method based on magnetic dipole sources and circle-shaped loop sources. The results show that the TEM responses of several geoelectric models calculated based on high-order B-spline interpolation exhibit higher accuracy than those calculated using conventional cubic spline interpolation.

Key words: transient electromagnetics; one-dimensional forward modeling; B-spline interpolation