第38卷 第6期	中国岩溶	Vol. 38 No. 6
2019年12月	CARSOLOGICA SINICA	Dec. 2019

武亚遵,岑雷,林云,等.河间隐伏型岩溶裂隙含水系统演化的数值模拟[J].中国岩溶,2019,38(6):839-845. DOI:10.11932/karst2019y11

河间隐伏型岩溶裂隙含水系统演化的 数值模拟

武亚遵1,2,岑 雷1,林 云1,2,曲鹏冲1,王子杰1

(1.河南理工大学资源环境,河南 焦作 454000;

2. 中原经济区煤层 (页岩) 气河南省协同创新中心,河南 焦作 454000)

摘 要:为揭示隐伏型岩溶含水系统在不同边界条件与介质特征下的发育状况,基于地下水渗流和 碳酸盐岩溶蚀理论构建耦合裂隙网络渗流与碳酸盐岩溶蚀的岩溶裂隙网络溶蚀扩展模型,模拟再现 了河间隐伏型岩溶含水系统平面上发育演化过程。结果显示:岩溶系统发育过程中流量变化呈现三 个阶段:第I阶段为缓慢层流阶段,流量增速为2.2×10⁻⁶ mL·(s·a)⁻¹,持续时间与初始水头差呈对数 关系;第II阶段为极快速紊流阶段,流量增速为5.5×10² mL·(s·a)⁻¹,持续时间与初始水头差呈线性 关系;第II阶段为快速紊流阶段,流量增速为26 mL·(s·a)⁻¹。优势裂隙的存在使得岩溶裂隙网络溶 蚀演化加快,非均质系统进入极快速紊流阶段所用时间较均质系统缩短了53%,裂隙溶蚀扩展的速 度加快了12.5%。



0 引 言

岩溶系统的演化始于侵蚀性水对可溶岩中裂隙 网络的溶蚀扩展,其规模和状态与发育过程密切相 关。系统初始介质特征及边界条件决定了其岩溶演 化过程,而构建合理的模型进行数值模拟可再现岩 溶发育过程。为此,国内外学者进行了诸多的尝试, 也取得了一些成果^[1-5],例如,国内的非连续裂隙网络 溶蚀扩展模型^[1-3]和国外的裂隙—管道耦合网络溶蚀 模型^[4-5]。然而这些模型均存在着不足或具有局限 性,例如,在非连续裂隙网络溶蚀扩展模型中,尽管 其采用非连续裂隙网络渗流模型较准确地刻画了初 始裂隙含水系统的不均性、渗透水流的各向异性和 局部非连续性,但其表征溶蚀作用的溶蚀速率方程 却采用 White 总结的钙离子浓度与钙离子饱和浓度 之差的二次方函数^[6-7]。而裂隙一管道耦合网络溶蚀 模型尽管考虑了碳酸盐岩裂隙岩体溶蚀作用的级次 性,但该模型认为岩溶系统演化初期就存在管道,而 实际上岩溶系统是由碳酸盐岩裂隙含水系统演化而 来的^[8],同时多数研究集中在系统剖面上的发育演 化^[9],而对于平面上的分布及演化研究较少。为揭示 河间隐伏型岩溶裂隙含水系统在平面上的分布特 征,本文拟构建耦合裂隙网络渗流与碳酸盐岩溶蚀 的岩溶裂隙网络溶蚀扩展模型,模拟不同边界和介 质特征下岩溶裂隙网络发育过程中流量、隙宽、渗透 率等变化规律,重现不同水动力条件下不同含水系 统岩溶发育过程,以期为隐伏型岩溶地区工程建设、 水资源的开发等提供科学依据。

基金项目:国家自然科学基金资助项目(41502224);河南理工大学博士基金(B2012-080)

第一作者简介:武亚遵(1981-),男,博士,副教授,主要从事水文地质、工程地质方面的研究工作。E-mail:wuyazun@163.com。

通信作者:林云(1983-),女,博士,讲师。E-mail:ylzz5211@sina.com。

收稿日期:2019-02-01

1 模型建立和求解

1.1 数学模型

裂隙网络溶蚀扩展模型是耦合裂隙网络渗流模型和裂隙的溶蚀速率方程得到的。裂隙网络中的流量可采用以下方程表征^[10]:

$$\begin{cases} q = \frac{\rho g b^3}{12\mu} J_f & \text{Re} \leq 600 \\ q = 4.7b \left[\frac{\rho g^4 J_f^4 b^5}{\mu} \right]^{\frac{1}{7}} & \text{Re} > 600 \end{cases}$$
(1)

式中:q为裂隙的单宽流量;b为裂隙隙宽;µ为水的动力粘滞系数;g为重力加速度;J_f为水力梯度。

其中: $Re = \rho V_f R / \mu$

式中: V_f 为裂隙水流平均流速; ρ 为流体密度; μ 为水的动力粘滞系数;R = b/2为水力半径。

岩溶裂隙水流在水平方向流动时,地下水流可 分为承压和非承压两种情况。当水流承压时,水流 过水断面和半径不变,而当水流非承压时,水力半径 被用于取代裂隙宽度用于裂隙水流计算,同时过水 断面面积也随着裂隙水位而变化。将裂隙水流实际 宽度作为非承压水流的水头值。

裂隙网络节点的渗流过程中,节点*i*的水量均衡 方程为^[11]:

$$\sum_{j=1}^{n} q_{j} = 0 (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$
 (2)

对于裂隙的隙面溶蚀过程,其溶蚀速率可用以 下公式表示^[12-14]:

$$F = \begin{cases} K_1 \left(1 - \frac{c}{c_{eq}} \right) & c < 0.9c_{eq} \\ K_2 \left(1 - \frac{c}{c_{eq}} \right)^4 & c \ge 0.9c_{eq} \end{cases}$$
(3)

式中:F为碳酸盐岩溶蚀速率; K_1 、 K_2 为溶蚀速率常数;c为钙离子浓度; c_{eq} 为钙离子平衡浓度。

1.2 模型求解

对裂隙网络中每个节点进行编号,根据研究区 边界条件对节点赋水头值。由水量均衡原理,通过 迭代求出内部裂隙网络每个节点的水头值。假设裂 隙网络内节点离散单元由四个裂隙微元构成,其中 中心节点*i*与四个相邻节点*i*_j相连。设裂隙网络离散 单元中心节点为*i*₀,中心节点的水头值为*h*₀,Ca²⁺浓 度为*c*₀,与之相邻的四个节点分别为*i*_j(*j*=1,2,3,4), 水头值为 h_{ij} ,Ca²⁺浓度为 c_{ij} 。中心节点与相邻节点 i_j 之间裂隙微元的流量由裂隙网络渗流模型得为 q_{ij} ,裂 隙微元长度为 L_{ij} ,裂隙宽度为 b_{ij} ,Ca²⁺浓度 c_{ij} 变化量 为 Δc_{ij} ,流量流入节点 i_0 为正值,流出为负值。鉴于地 下水流是连续的,认为Ca²⁺浓度也是连续变化的,因 此中心节点Ca²⁺浓度为^[15]:

$$c_{i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} q_{ij} (c_{ij} + \Delta c_{ij})}{\sum_{j=1}^{n} q_{ij}} (n=1,2,3,4)$$
(4)

式中: c_i 为节点i钙离子浓度; c_i 、 Δc_i 为与i相邻节点j的钙离子浓度、浓度变化量; q_i 为i相邻节点j的流量。

通过计算机程序计算可求出每一段裂隙段的 Ca²⁺浓度。按照裂隙溶蚀扩展模型计算裂隙网络每 一段裂隙的溶蚀量,然后更新裂隙网络每条裂隙的 宽度。裂隙网络在定水头作用下演化过程计算程序 的流程如图1:





2 隐伏型岩溶水系统发育演化模拟

2.1 概念模型

由于隐伏型岩溶含水系统上覆存在有较厚的盖层,因此,几乎不存在降雨入渗补给。系统内地下水的渗流是在两河水位差的作用下进行的。构建模型时认为左河水位高于右河,同时取两流线为前后边界,据此可将边界概化为:左、右为第一类边界,前后为二类零流量边界(图2),系统内裂隙为正交裂隙,隙宽为0.15 mm。



2.2 模拟结果及分析

2.2.1 均质系统

根据均质裂隙网络在第一类边界条件下发育演 化模拟结果,得到裂隙流量的变化曲线(图3)。根据 裂隙内的水流状态和其增加速率快慢将曲线划分为 三个阶段:第Ⅰ阶段为全充满层流状态,此阶段内裂 隙网络中流量小,增长缓慢,增长速率为2.2× 10⁻⁶ mL·(s·a)⁻¹;第Ⅱ阶段为全充满紊流状态,裂隙的 流量迅速增加,增加速率为5.5×10² mL·(s·a)⁻¹, 并且可看到此时段内流量增加的平均速度最快;第 Ⅲ阶段为半充满紊流状态,该段时间内裂隙网络流 量大,增速介于Ⅰ、Ⅱ阶段之间,流量增加速率为 26 mL·(s·a)⁻¹。





第Ⅰ阶段持续至45ka,该时间内裂隙网络流处 于层流状态,流量增长缓慢。初始裂隙隙宽由0.15 mm变为0.42mm(图4),裂隙隙宽较初始裂隙增加 了3.2倍,渗流量从0.0028mL·s⁻¹变为0.096mL·s⁻¹, 增加了3.5倍。由于初始裂隙狭小,渗透率小(图5), 透水性差,导致裂隙岩体内渗流量小,溶蚀量小,裂 隙网络溶蚀扩展慢。第Ⅱ阶段裂隙网络的流量迅速 增加,此阶段内流量增加的平均增速最快,裂隙的渗透系数较大,裂隙内水流处于紊流状态,且充满水流通道,溶蚀扩展速度快,流速增加速度最快,此阶段约10ka内,裂隙隙宽较第 I 阶段增加了 2.6×10⁷倍,可见这一阶段裂隙流量发育非常迅速,与第 I 阶段的流量平均增长速率相差 3×10⁷倍。第 III 阶段此时由于水流通道的继续扩大,水流不能完全充满通道,通道处于半充满状态,导致水量的增加速度减小,并且未与水流接触的部分不能被溶蚀,溶蚀速率也较全充满水时小。因此,该阶段裂隙网络流量增速比第 II 阶段慢,但比第 I 阶段快。



Fig. 4 Curves of crack flow and crack width





发育演化初期裂隙网络隙宽扩展缓慢,对比同 一裂隙不同位置的隙宽随时间变化特征发现(图6), 靠近补给边界的裂隙溶蚀扩展最快,平均溶蚀速率 为1×10⁻⁶ cm·a⁻¹;接近排泄边界的地方裂隙溶蚀得慢, 平均溶蚀速率为6×10⁻⁷ cm·a⁻¹,相差约1.7倍。这与 补给边界初始钙离子浓度低,从补给边界向排泄边 界钙离子浓度越来越高,导致溶蚀扩展速度变慢 有关。





为探讨不同初始水头差对均质碳酸盐岩岩体裂 隙网络发育的影响,模拟了水力梯度分别为0.10、 0.25、1.00、2.00下岩溶裂隙网络的发育情况。通过 分析均质系统不同水力梯度下裂隙流量的变化(图7 和表1)可发现:初始水力梯度越大,裂隙网络发育演 化过程中第 I 阶段持续时间越短,第 II 阶段持续时 间越长。当初始水力梯度足够大时,第 I 阶段过程 几乎不存在。







表1 不同水力梯度下第 | 阶段和第 || 阶段持续时间

Table 1 Durations of first and second stages under different hydraulic gradients

よよば南川	持续时间		
水力梯度/ka	第【阶段	第Ⅱ阶段	
0.10	45.7	4.8	
0.25	25.0	15.0	
1.00	8.0	42.0	
2.00	0.3	78.0	

第 I 阶段和第 II 阶段持续时间与初始水头差存 在明显的函数关系(图 8),其中,第 I 阶段持续时间 (T_1) 与初始水头差 (ΔH) 呈对数关系: $T_1 =$ -14548ln (ΔH) +61653(R²=0.97),第 II 阶段持续时 间 (T_2) 与初始水头差 (ΔH) 呈线性关系: $T_2 =$ 901.26 ΔH +5421.1(R²=1.00)。





2.2.2 非均质系统

非均质裂隙网络是在均质裂隙网络垂直于水头 边界的中间位置设置了一条隙宽为0.3 mm优势 裂隙。

岩溶裂隙网络发育演化过程中非均质含水系统 与均质系统隙宽的变化有所差别(图9)。开始时隙 宽增长速度慢,后来隙宽增长速度快,非均质系统优 势裂隙扩展速度最快。均质系统裂隙扩展速度最 慢,其溶蚀扩展速率小于非均质系统中其他裂隙。 非均质含水系统中裂隙溶蚀扩展的第 II 阶段出现时 间比均质系统早,非均质水流状态在21 ka时发生改 变,较均质系统缩短24 ka,时间缩短了53%。





层流状态期间裂隙溶蚀扩展的研究(图10)表明,非均质含水系统裂隙发育与均质水系统存在明

显的差异。非均质系统优势裂隙从 0.30 mm 变为 0.47 mm,裂隙溶蚀扩展量为 0.17 mm,系统中其他 裂隙隙宽从 0.15 mm 变为 0.24 mm,隙宽溶蚀扩展量 为 0.09 mm。而均质系统裂隙宽度由 0.15 mm 变为 0.23 mm,溶蚀扩展量为 0.08 mm,非均质系统较均 质的隙宽扩展快 12.5%。这进一步说明优势裂隙的 存在加速了裂隙网络的溶蚀扩展。





Fig. 10 Curve of crack width varying with time for different media

由于非均质系统裂隙与均质系统裂隙有相同的 初始水头差和隙宽,而优势裂隙的存在,使得水流加 快,其中的钙离子能够更快地被带走,裂隙网络钙离 子浓度降低(表2),水的溶蚀能力增强,从而使非均 质系统较均质系统溶蚀快。

表2 不同裂隙中钙离子浓度随裂隙发育分布情况

(取介于补给边界和排泄边界中间位置)

Table 2	Distribution of calcium ion concentration in cracks	
	with the development of cracks	

时间/ka	优势裂隙	非均质系统 其他裂隙	均质系统裂隙
t=0.1	C_{eq}	C_{eq}	C _{eq}
t=1.1	$0.99033c_{eq}$	$0.991 \ 13c_{eq}$	$0.99121c_{eq}$
t=2.1	$0.990 \ 15c_{eq}$	$0.990\ 60c_{eq}$	0.990 $64c_{eq}$

隙宽随时间呈指数变化:优势裂隙隙宽 b_1 = 0.030 1 e^{2E-05t} ; 非 均 质 系 统 中 其 他 隙 宽 b_2 = 0.014 6 e^{2E-05t} ;均质系统中隙宽 b_3 = 0.014 5 e^{2E-05t} 。据此可发现裂隙隙宽(b)的溶蚀速率(b')和裂隙隙宽的溶蚀速度变化率(b''):

$$b_1: b_2: b_3 = b'_1: b'_2: b'_3 = b''_1: b''_2: b''_3 = 301 : 146 : 145$$
(5)

数量级为:

 $b: b': b'' = 1: 2 \times 10^{-5}: 4 \times 10^{-10}$ (6)

式(5)表明优势裂隙隙宽和隙宽变化率最快,均 质系统隙宽和隙宽变化率最慢。同时,初期裂隙的 溶蚀扩展速度较慢,优势裂隙的隙宽溶蚀速率为6× 10⁻⁶ mm·a⁻¹,是其他裂隙和均质裂隙溶蚀速率的2倍。 式(6)表明裂隙隙宽是裂隙溶蚀速率的5×10⁴倍,是 裂隙溶蚀速度变化率的2.5×10°倍。

系统发育演化初期,优势裂隙的流量为 0.022 mL·s⁻¹(图11),占整个裂隙网络流量的25%,非 均质系统其他裂隙中的流量与均质系统裂隙流量相 同;进入极快速溶蚀阶段(21 ka)后,优势裂隙的流量 为0.12 mL·s⁻¹,占整个裂隙网络流量的23%,流量增 量为0.095 mL·s⁻¹,是其他裂隙流量平均增量的 709%。非均质系统其他裂隙中的流量较均质系统裂 隙流量增加了1%。



Fig. 11 Curve of flow of each node at head boundary of the heterogeneous system varving with time

在岩溶发育演化的初期,裂隙的平均隙宽和标 准差不断增大,差异系数也有小幅增大,这表明系统 存在着分异演化;而进入快速溶蚀阶段后,裂隙的平 均隙宽和标准差显著增大,但变异系数却显著减小, 后期逐渐趋于稳定,这表明定水头补给边界下快速 溶蚀阶段岩溶分异现象不明显(图12)。这是由于系 统沿水流方向各裂隙水头差相同,在此情况下,系统 其他裂隙仍然能得到相应的水量,而优势裂隙的存 在增加了水流的溶蚀能力,因此非均质系统发育速 度加快,故系统中其他裂隙流量占比和发育程度均 较均质系统的高。

均质系统在演化过程中,受边界影响等水头线 变化不大。而在非均质系统演化过程中(图13),非 均质裂隙网络的流量主要集中在优势裂隙,然后向 周围的普通裂隙流动,这导致临近的裂隙发育速度



图 12 非均质系统裂隙的平均隙宽、标准差和变异系数的变化曲线

Fig. 12 Average crack width, standard deviation, and coefficient of variation of heterogeneous system varying with time



geneous aquifer system

也有所加快。初始状态,同一裂隙各处隙宽相等,导 致水头场分布的比较均匀,各处水力梯度几乎相等, 水流处于层流状态,流速慢,靠近补给边界Ca²⁺浓度 低,发育速度加快,靠近排泄边界Ca²⁺浓度高,裂隙 发育速度慢。约21 ka后,水头线分布明显向排泄边 界移动。由前文可知,地下水由层流变成紊流后,裂 隙溶蚀加快,水头场分布发生了明显变化,使得排泄 边界水力梯度更大,流动速度更快,裂隙溶蚀扩展较 快。约22 ka后,排泄边界附近的裂隙得到了较好的 发育,使得水头场的分布再次比较均匀。这与李茂 秋¹⁶采用电阻网络模型以及 Clemens T^[5]采用 CAVE 耦合模型取得的结论基本一致。

上述研究表明,水力梯度及介质特征对岩溶系 统的发育演化影响较大,在补给边界和存在优势裂 隙的区域溶蚀速率快,岩溶发育程度高;而靠近排泄 边界,优势裂隙连通性好,水量较大且比较稳定。因 此,岩溶地区线路工程应尽量避开补排边界和存在 优势裂隙的区域,而水源地的选取应靠近存在优势 裂隙的排泄边界附近。

3 结 论

(1)河间隐伏型岩溶裂隙含水系统发育演化过 程中,流量和流态变化与水动力条件有关。岩溶系 统发育过程中流量变化呈三个阶段:第 I 阶段为缓 慢层流阶段,流量增加速率 2. 2×10⁻⁶ mL·(s·a)⁻¹,其持 续 时 间 与 初 始 水 头 差 呈 对 数 关 系 : $T_1 =$ -14 548ln(ΔH) + 61 653;第 II 阶段为极快速紊流阶 段,流量的增加速率为 5. 5×10² mL·(s·a)⁻¹,其持续时 间 与初 始 水 头 差 呈 线 性 关 系 : $T_2 =$ 901.26 ΔH + 5421.1。第 III 阶段为快速紊流阶段,流量的增加速率 为 26 mL·(s·a)⁻¹。

(2)沿地下水流向,均质系统中同一裂隙的不同 位置溶蚀速率不同,靠近补给边界的地方裂隙溶蚀 快,平均溶蚀速率为1×10⁻⁵ mm·a⁻¹;接近排泄边界的 地方裂隙溶蚀慢,平均溶蚀速率为6×10⁻⁶ mm·a⁻¹,两 者相差约1.7倍。

(3)均质系统内各裂隙间的溶蚀扩展情况基本 一致,而非均质系统优势裂隙发育演化速率较快,进 入极快速的紊流阶段时,优势裂隙平均隙宽增加了 0.17 mm,是其他裂隙的1.9倍。优势裂隙的存在加 快了水流运移,降低了系统内Ca²⁺浓度,加快了裂隙 网络的发育演化;非均质系统进入极快速的紊流阶 段的时间较均质系统缩短了53%,裂隙平均溶蚀扩展 速率增加了12.5%。

参考文献

- [1] 沈继方,于青春,万军伟.碳酸盐岩岩溶化过程数值模拟
 [M]//袁道先等.中国岩溶动力系统.北京;地质出版社. 2002:100-108.
- [2] 薛亮,于青春.岩溶水系统演化中河间地块分水岭消失过程的数值模拟分析[J].水文地质工程地质,2009,36(2):7-12.
- [3] 王云,于青春,薛亮,等.裂隙岩溶含水系统溢流泉演化过程的数值模拟[J].中国岩溶,2010,29(4):378-384.
- [4] Clemens T, Hükinghaus D, Sauter M, et al. A combined continuum and discretenetwork reactive transport model for the simulation of karst development [J]. IAHS PUBLICATION, 1996,237(1): 309-318.
- [5] Clemens T, Hückinghaus D, Sauter M, et al. Modelling the genesis of karst aquifer systems using a coupled reactive network model [J]. IAHS PUBLICATION, 1997, 241 (1): 3-10.
- [6] White W. Role of solution kinetics in the development of karst aquifers [J]. Karst hydrogeology International Association of Hydrogeologists, 12th Memoirs, 1977,12(1): 176-187.
- [7] Kaufmann G.Karst aquifer evolution in a changing water table environment [J]. Water Resources Research, 2002, 38 (6) : 26/1-26/9.
- [8] Kaufmann G.Modelling karst geomorphology on different time

scales[J].Geomorphology, 2009, 106 (1-2) :62-77.

- [9] Yu Qingchun, Shen Jifang, Wan Junwei, et al. Some investigation on early organization of Karst system [J]. Journal of China University of Geosciences, 1999, 10(4):314-321.
- [10] 速宝玉, 詹美礼.光滑裂隙水流模型实验及其机理初探[J]. 水利学报, 1994(5):19-24.
- [11] 毛亮,于青春,王敬霞,等.降雨对裂隙型岩溶含水系统演化 影响的数值模拟研究[J].中国岩溶,2017,36(1):42-48.
- [12] 刘再华, Dreybrodt W.DBL 理论模型及方解石溶解/沉积速 率预报[J].中国岩溶, 1998, 17 (1):1-7.
- Plummer L N, Wigley T M L, Parkhurst D L. The kinetics of calcite dissolution in CO₂—water systems at 5 °C to 60 °C and 0.0 to 1.0 atm CO₂ [J]. American Journal of Science, 1978, 278 (2) :179-216.
- [14] Dreybrodt W.Principles of early development of karst conduits under natural and man-made conditions revealed by mathematical analysis of numerical models [J]. Water Resources Research, 1996, 32 (9) :2923-2935.
- [15] 武亚遵,林云,万军伟,等.碳酸盐岩单裂隙渗流-溶蚀耦合 模型及其参数敏感性分析[J].中国岩溶,2016,35(1): 81-86.
- [16] 李茂秋.向斜盆地区域动力水流模型[J].中国岩溶,1985,4 (3):33-41.

Numerical simulation for the evolution of covered karst fissure system between rivers

WU Yazun^{1,2}, CEN Lei¹, LIN Yun^{1,2}, QU Pengchong¹, WANG Zijie¹

(1. Institute of Resource and Environment, Henan Polytechnic University, Jiaozuo, Henan 454000, China; 2. Collaborative Innovation Center of Coalbed Methane and Shale Gas for Central Plains Economic Region, Jiaozuo, Henan 454000, China)

Abstract Initial media characteristics and boundary conditions of a karst system determine its evolution process. The purpose of this study is to reveal the development of a concealed karst aquifer system under different boundary conditions and medium characteristics. Based on groundwater seepage and carbonate dissolution theory, we construct a karst fissure network dissolution propagation model of coupled fracture network seepage and carbonate dissolution, and conduct simulation on the evolution process of the concealed karst aquifer system between rivers. The results show that the flow changes during the development of the karst system have three stages. The first stage is a slow laminar flow with a flow rate increase of 2.2×10^{-6} mL·(s·a)⁻¹, with a duration logarithmically related with the initial head difference. The second stage is a very fast turbulent with a flow rate increase of 5.5×10^2 mL·(s·a)⁻¹, and the duration is linearly related with the initial head difference. Stage III is a fast turbulent with a flow rate increase of 26 mL·(s·a)⁻¹. The existence of dominant cracks accelerates the dissolution of karst fracture network. The time for the heterogeneous system entering the extremely fast turbulence phase is 53% shorter than that of the homogeneous system, and the dissolution rate of cracks is accelerated by 12.5%.

Key words concealed, crack network, hydraulic gradient, medium characteristics, numerical simulation

(编辑 吴华英 黄晨晖)