

基于连续—非连续方法的地质体材料 变形—拉裂过程模拟 ——以岩样紧凑拉伸试验为例

王学滨^{1,2}, 白雪元², 祝铭泽²

(1. 辽宁工程技术大学 计算力学研究所, 辽宁 阜新 123000;

2. 辽宁工程技术大学 力学与工程学院, 辽宁 阜新 123000)

摘要: 地质体材料易发生拉裂, 为了有效模拟地质体材料的变形—拉裂过程, 自主研发了一种连续—非连续方法。该方法实质是拉格朗日元法与虚拟裂缝模型的耦合, 既能较准确模拟应力应变场, 又能较准确模拟连续介质向非连续介质转化的复杂过程。以岩样紧凑拉伸试验为例开展变形—拉裂过程研究, 得到以下结果。紧凑拉伸岩样的变形—拉裂过程: 在岩样的 V 形缺口尖端附近出现最大主应力集中现象; 节点发生分离, 虚拟或真实裂缝扩展, 最大主应力始终集中于虚拟裂缝的尖端位置; 岩样被拉裂成两部分。最大不平衡力发生 1 次突增对应着 1 个节点的分离。在峰值之前, 岩样的载荷—位移曲线表现出了硬化现象; 随着岩样尺寸的增加, 应力—应变曲线的峰值有所下降, 这与 Bazant 的尺度律相一致, 且峰后应力—应变曲线的陡峭程度增大。目前针对紧凑拉伸试验的模拟结果是合理的, 由此在一定程度上说明了提出的连续—非连续方法在连续介质向非连续介质转化模拟方面的突出能力。

关键词: 地质体材料; 拉裂; 岩样; 紧凑拉伸; 尺度律; 虚拟裂缝模型; 拉格朗日元法; 应力—应变曲线

中图分类号: TU452

文献标识码: A

MODELING OF DEFORMATION-CRACKING PROCESSES OF GEOMATERIALS BASED ON A CONTINUUM-DISCONTINUUM METHOD: A CASE STUDY OF COMPACT TENSION TEST

WANG Xuebin^{1,2}, BAI Xueyuan², ZHU Mingze²

(1. Institute of Computational Mechanics, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, Liaoning, China;

2. College of Mechanics and Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, Liaoning, China)

Abstract: Geomaterials are easily subject to tensile cracking. To model effectively deformation-cracking processes of geomaterials, a continuum-discontinuum method is developed, which is a combination of the Lagrangian element method and the fictitious crack method. This method can be used to more accurately model the stress and strain fields and the complex transition process from the continuum medium to the discontinuum medium. To demonstrate the ability of this method, deformation-cracking processes of rock specimens under compact tension are modeled. The following results are found. Deformation-cracking processes of rock specimens under compact tension are as follows: firstly, the concentrated maximum principal

stress is observed at the tip of the V-shaped notch; secondly, nodes get separated, fictitious or real cracks extend, and the concentrated maximum principal stress is at the tip of the V-shaped notch all the time; finally, the rock specimen is split to two parts. A rapid increase in the maximum unbalanced force corresponds to a nodal separation. Load-displacement curves exhibit strain-hardening phenomena at pre-peak. The peak of stress-strain curve decreases with an increase of the size of the rock specimen, which is consistent with the scaling law of Bazant. Moreover, the post-peak stress-strain curve becomes steep with an increase of the size of the rock specimen. The present numerical results of rock specimens under compact tension are reasonable, indicating the apparent ability of the present continuum-discontinuum method to model the transition process from the continuum medium to the discontinuum medium.

Key words: geomaterials; tensile cracking; rock specimen; compact tension; scaling law; fictitious crack model; the Lagrangian element method; stress-strain curve

0 引言

地质体材料的破坏实质是从连续介质向非连续介质转化或非连续介质进一步演化的复杂过程。与其它破坏形式相比,地质体材料更易发生拉破坏。许多地质灾害的发生均与拉破坏有关^[1-2],例如,巷道或隧洞围岩的板裂化、岩层的离层和破断、公路的边坡破裂、地下开采以及地震引起的地裂缝等。因此,研究地质体材料的拉破坏过程对于地质灾害的预防具有重要意义^[3-4]。

目前,研究人员多采用连续介质方法(例如有限元和拉格朗日元方法等)或非连续介质方法(离散元和非连续变形分析方法等)研究地质体材料的拉破坏过程。在基于有限元法的无拉应力分析中,当地质体材料发生拉裂后,垂直于裂缝方向不能承受拉应力,采用反复迭代的方法消除单元的拉应力^[5-6];一些研究人员将单元劈裂以形成新的不连续面来模拟拉裂过程^[7-8],但未考虑不连续面之间的作用。在一些离散元法和非连续变形分析方法中,将地质体材料离散成块体单元,通常不考虑块体单元之间的拉力作用^[9]。实际上,在宏观裂缝出现前,断裂过程区或虚拟裂缝面具有一定的黏聚特性,并未完全丧失承载拉应力的能力^[10]。有的研究人员在非连续变形分析方法中引入节理单元以模拟块体单元间的拉应力作用^[11-12];在离散元中引入虚拟裂缝模型以模拟裂缝面的黏聚作用^[13],将虚拟裂缝面之间的法向黏聚力简化到单元的节点上,阻碍虚拟裂缝张开,法向黏聚力的大小与法向张开度有关。

连续介质方法通常不能很好处理多条任意分布的裂缝的相互作用问题和大尺度的材料流动及

运动问题^[14];非连续介质方法的侧重点在于模拟地质体材料的大位移和碎裂过程,而对于应力应变场的计算精度稍显不足。为了避免单一的连续介质方法或非连续介质方法难以模拟连续介质向非连续介质转化的复杂过程,自主研发了一种连续—非连续方法。为了展示该方法的能力,模拟了岩样的紧凑拉伸试验,该试验是准脆性和韧性金属材料断裂韧性等参数测量的常用手段之一,由于具有试样尺寸小、便于加载和量测等优点,目前已广泛使用^[15-16],对岩样变形—拉裂过程中多种力学量(岩样中单元的最大主应力、节点的最大不平衡力、V形缺口下方某些节点的法向力和法向张开度)进行了监测,细致分析了岩样的变形—拉裂过程,通过对比不同尺寸岩样的模拟结果,分析了紧凑拉伸试样的尺寸效应。

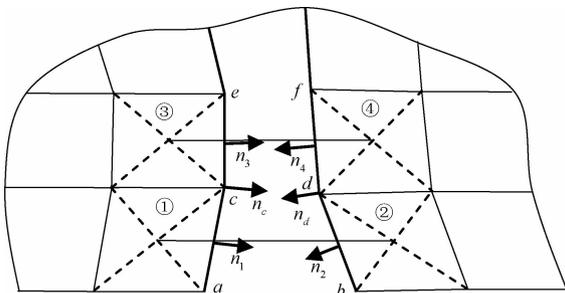
1 连续—非连续方法简介

连续—非连续方法包括连续部分计算和非连续部分计算。前者包括应力、应变、弹性力计算和运动方程求解等内容,遵循拉格朗日元方法的基本原理。后者包括节点分离判别、分离方向选择和法向力施加等内容。通过在拉格朗日元方法中引入虚拟裂缝模型处理节点分离问题。和连续介质方法相比,该方法可以模拟真实的拉裂现象,且不需要重新划分网格。和非连续方法相比,在未拉裂前,该方法处理的是连续介质,具有较好的计算精度。

采用最大主应力作为节点分离判据。若节点的最大主应力达到地质体材料的抗拉强度时,则节点发生分离,节点成为分离节点。节点的最大主应力可取节点周围单元中的最大主应力的最大

值。通过节点的最大主应力方向确定虚拟裂缝面，可以从分离节点相关的单元边界中选择与节点最大主应力垂直方向最接近的一条边作为虚拟裂缝面。

虚拟裂缝面上节点的法向确定见图1。在通常情况下，虚拟裂缝面不止由一条单元边界构成（见图1粗实线）。尽管，虚拟裂缝面是连续的，但在虚拟裂缝面上节点处不可导。此时，虚拟裂缝面上节点处的法向应是一个平均值。例如，虚拟裂缝面上 c 点处的近似法向 n_c 可由边 ac 和 ce 的法向（ n_1 和 n_3 ）取平均获得。同理，可获得 d 点的近似法向。实际上， n_c 与 n_d 一般不在一条直线上，这将不可避免地导致施加法向力之后产生一个转矩。这里，为了消除转矩的影响，采用了一种近似的计算方法。根据节点周围单元形心的连线近似替代虚拟裂缝面的法向。在计算虚拟裂缝面上节点 a 、 b 处的法向时，利用这两个节点周围单元①、②的形心连线作为这两个节点处的法向。在计算虚拟裂缝面上节点 c 、 d 处的法向时，首先，对这两个节点周围4个单元进行分组，单元①、②作为一组，单元③、④作为一组，相应地，虚拟裂缝面也被分成两组；然后，根据每一组单元形心连线近似每一组虚拟裂缝面的法向；最后，对这两组虚拟裂缝面法向取平均，获得虚拟裂缝面上节点 c 、 d 处的法向。



①-④为虚拟裂缝面附近的单元； $a-f$ 为虚拟裂缝面上的节点； n_1-n_4 为虚拟裂缝面的外法向； n_c 和 n_d 分别为虚拟裂缝面上节点 c 和 d 的外法向

图1 虚拟裂缝面上节点处法向的确定

Fig. 1 Determination of normal directions of nodes on fictitious cracking faces

根据法向张开度和法向黏聚力之间的关系计算当前的法向黏聚力，再将其转化成法向力施加于分离节点上，这样，就实现了虚拟裂缝面间的相互联系。法向黏聚力（ σ_n ）与法向张开度（ w ）之间的关系为

$$\sigma_n = \begin{cases} \sigma_t \left(1 - \frac{w}{w_f}\right), & 0 \leq w \leq w_f \\ 0, & w > w_f \end{cases} \quad (1)$$

式中， w_f 为临界法向张开度， $w_f = 2G_f/\sigma_t$ ， σ_t 为抗拉强度， G_f 为I型断裂能。

应当指出，当一个节点发生分离后，对两个分离节点施加法向力，法向力等于法向黏聚力乘以法向黏聚力的作用尺寸。当节点刚发生分离时，法向力最大。在理论上，最大法向力等于抗拉强度（即最大法向黏聚力）乘以法向黏聚力的作用尺寸。当两个分离节点的法向张开度达到临界法向张开度后，分离节点之间将无任何力的作用，虚拟裂缝变成真实裂缝。法向黏聚力的作用尺寸与分离节点所处位置有关。对于正方形单元，当虚拟裂缝面上的节点处于一个单元时，法向黏聚力的作用尺寸为正方形单元尺寸的一半；当虚拟裂缝面上的节点处于两个单元时，法向黏聚力的作用尺寸为正方形单元尺寸。

2 算例及结果分析

2.1 计算模型及参数

为了展示该方法的能力，以紧凑拉伸岩样的变形—拉裂过程为例开展研究，共采用3个计算方案。方案1~3中岩样的高度分别为0.5 m、1 m和2 m。单元类型包括正方形单元和等腰直角三角形单元。两个等腰直角三角形构成一个V形缺口。正方形单元的边长和三角形单元直角边的边长相等。

各方案的其他参数取值如下：面密度 ρ 取为2700 kg/m²，重力加速度 g 取为10 m/s²，时间步长 Δt 取为 2.658×10^{-6} s，局部自适应阻尼系数 α 取为0.2，体积模量 K 取为11.67 GPa，剪切模量 G 取为8.75 GPa，抗拉强度 σ_t 取为2.0 MPa，断裂能 G_f 取为100 N/m。在岩样的左边界施加水平约束，在岩样的右边界施加水平向右的速度，速度的大小为0.005 m/s，计算在平面应变、小变形条件下进行。应当指出，由 σ_t 和 G_f 可获得 $w_f = 2G_f/\sigma_t = 1 \times 10^{-4}$ m。

2.2 计算结果及分析

方案1中岩样的变形—拉裂过程见图2，图中节点位移放大倍数为200，颜色代表单元的最大主应力 σ_3 ，负值代表压应力，正值代表拉应力。方案1的各种力学量的演变规律见图3。方案2中岩

样的变形—拉裂过程见图4, 各种力学量的演变规律见图5。方案3中岩样的变形—拉裂过程见图6, 各种力学量的演变规律见图7。最大不平衡力随时步数目的演变规律见图3a、图5a和图7a。最大不平衡力是指岩样中各节点不平衡力中的最大值。载荷—位移曲线见图3b、图5b和图7b。V形缺口下方某些节点的法向张开度随时步数目的演变规

律见图3c、图5c和图7c。V形缺口下方某些节点的法向力随时步数目的演变规律见图3d、图5d和图7d, 图中 D_1 为监测点距离岩样下端部的距离, D_2 为V形缺口尖端距离岩样下端部的距离。各方案的载荷—位移曲线与固定裂缝模型的结果的对比见图8。各方案的应力—应变曲线的对比结果见图9。

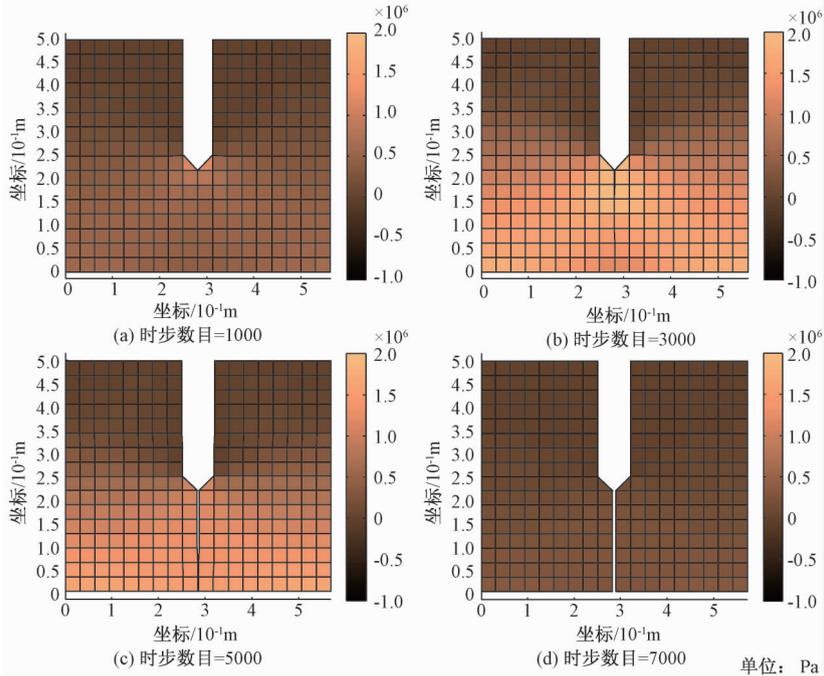


图2 岩样变形—开裂过程中 σ_3 的时空分布规律(方案1)

Fig. 2 Spatiotemporal distribution of σ_3 during the deformation-cracking process (scheme 1)

由岩样的变形—拉裂过程(见图2、图4、图6)可以发现: 首先, 岩样的V形缺口尖端附近的单元出现最大主应力集中现象(见图2a、图4a、图6a); 然后, V形缺口尖端处节点首先发生分离(见图2b、图4b、图6b), 分离节点附近的最大主应力发生卸载; 随着时步数目的增加, 分离节点不断增多, 虚拟或真实裂缝沿岩样对称线不断向下扩展(见图2c、图4c、图6c), 直至岩样被拉裂成左、右两部分(见图2d、图4d、图6d)。在此过程中, 可以观察到最大主应力始终集中于虚拟裂缝尖端及应力重分布的现象。

由方案1的各种力学量的演变规律(见图3)可以发现, 在加载初期, 随着时步数目的增加, 最大不平衡力不断降低(见图3a), 这标志着岩样逐渐趋于平衡; 当时步数目达到1954时, 最大不平衡力发生了1次突增, 这恰与V形缺口尖端处节点($D_1/D_2 = 1$)的法向张开度出现非零(见图

3c)和法向力出现非零(见图3d)的时刻相对应, 这标志着V形缺口尖端处节点发生分离; 此时, 载荷—位移曲线并没有达到峰值(见图3b); 随后, 载荷—位移曲线的斜率有所降低, 表现出应变硬化现象; 当时步数目达到3696时, 载荷—位移曲线达到峰值; 随后, 载荷逐渐下降, 直至为零。应当指出, 当时步数目达到2690时, 最大不平衡力出现了1次猛烈的突增(第2次突增), 随后, 又发生了6次突增, 最大不平衡力总共发生了8次突增, 这与V形缺口下方的节点数目相一致。这说明, 每发生1次节点分离, 最大不平衡力发生1次突增, 这类类似于物理试验中的声发射现象。在每次突增后, 随着时步数目的增加, 最大不平衡力都有所降低, 这意味着岩样趋于平衡。

由法向张开度随时步数目的演变规律(见图3c)和法向力随时步数目的演变规律(见图3d)可以发现, 当时步数目达到1954时, $D_1/D_2 = 1$ 处

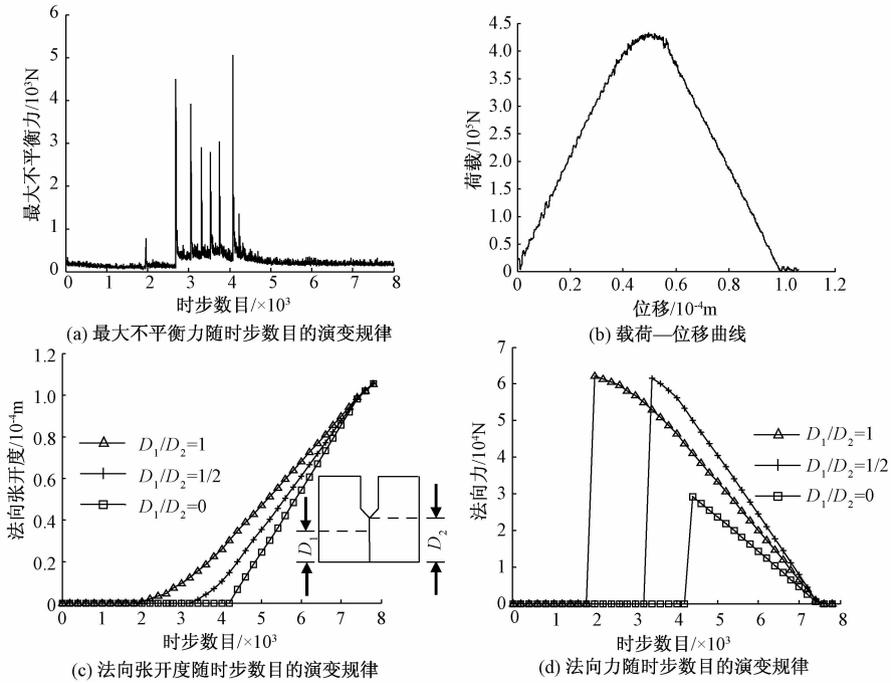


图3 方案1的各种力学量的演变规律

Fig. 3 Evolution of various mechanical variables in scheme 1

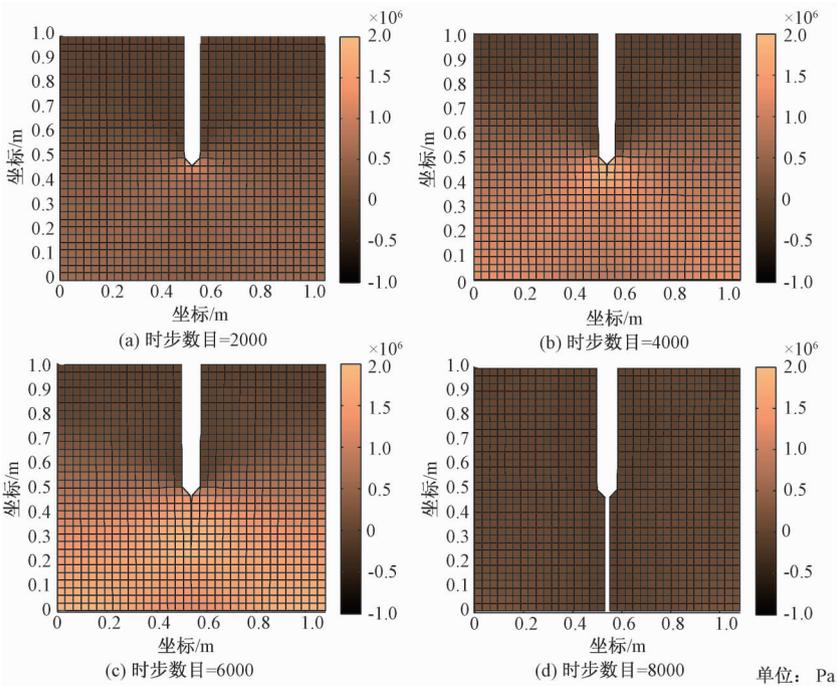


图4 岩样变形—开裂过程中 σ_3 的时空分布规律 (方案2)

Fig. 4 Spatiotemporal distribution of σ_3 during the deformation-cracking process (scheme 2)

节点发生分离；当时步数目达到 3309 时， $D_1/D_2 = 1/2$ 处节点发生分离；当时步数目达到 4236 时， $D_1/D_2 = 0$ 处节点（岩样下边界上节点）发生分离。当每个节点分离不久，法向张开度和法向力随时步数目的演变规律呈现一定的非线性，这种

非线性随着 D_1/D_2 的降低有所减弱。在上述非线性阶段之后，随着时步数目的增加，分离节点的法向张开度和法向力基本上分别呈线性方式增加和下降。当时步数目达到 7457 之后，各分离节点的法向张开度—时步数目曲线汇聚成一条直线，

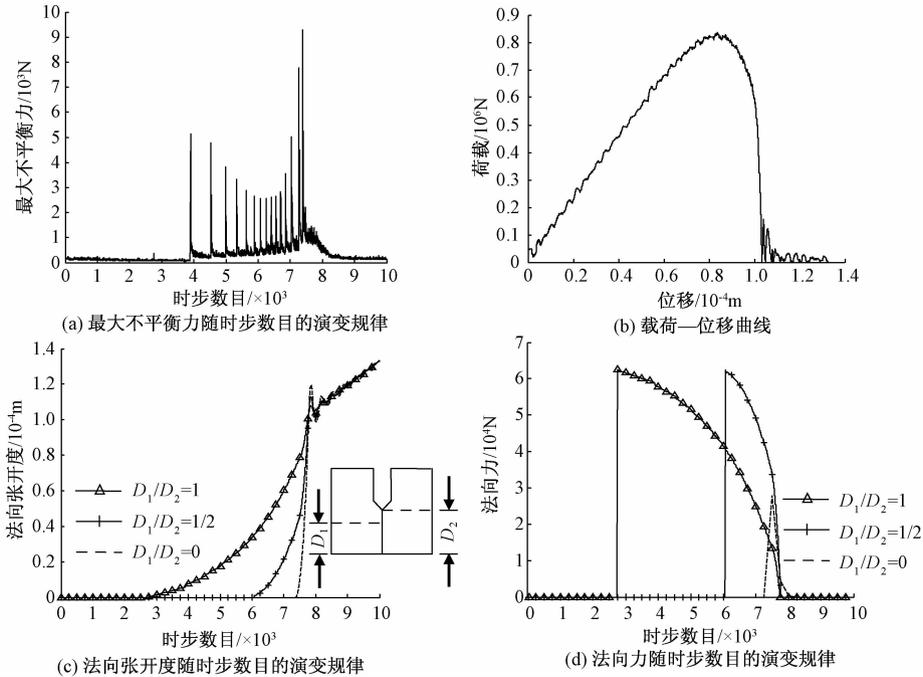


图5 方案2的各种力学量的演变规律

Fig. 5 Evolution of various mechanical variables in scheme 2

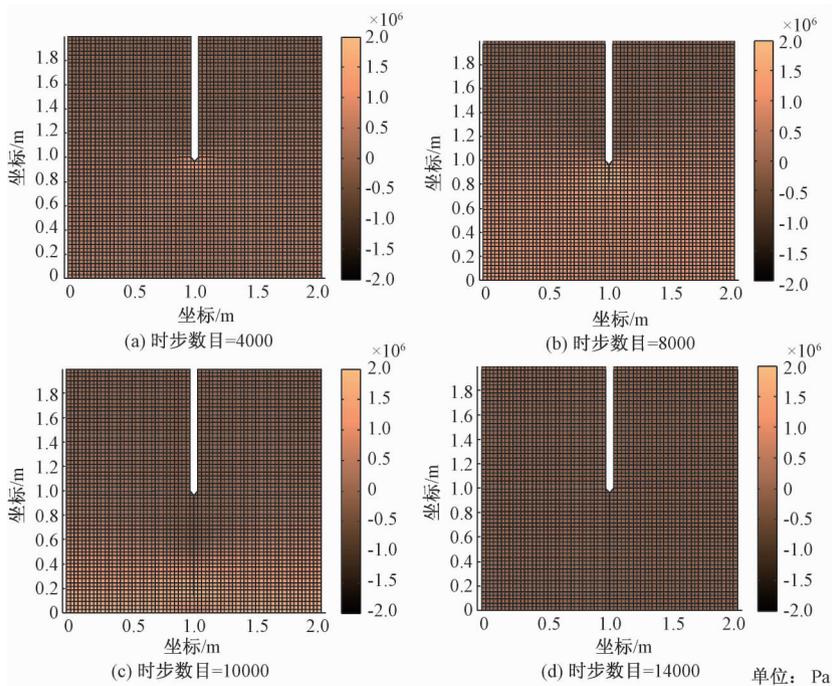


图6 岩样变形—开裂过程中 σ_3 的时空分布规律 (方案3)

Fig. 6 Spatiotemporal distribution of σ_3 during the deformation-cracking process (scheme 3)

而各分离节点的法向力几乎同时降为零。这表明, 各分离节点之间已不存在力的作用, 岩样的承载力完全丧失。

下面, 对方案1中岩样的峰值载荷进行理论估算。仅取岩样的下半部分为研究对象, 且不考虑V

形缺口, 即将岩样简化成单向拉伸岩样。假设岩样整个断面同时被拉裂, 在理论上, 简化岩样的峰值载荷应为抗拉强度 σ_t (取为2 MPa) 乘以8个正方形单元的边长 b (岩样的厚度取为1 m), 即 $8b \cdot \sigma_t = 5.0 \times 10^5 \text{ N}$ 。由载荷—位移曲线 (见图

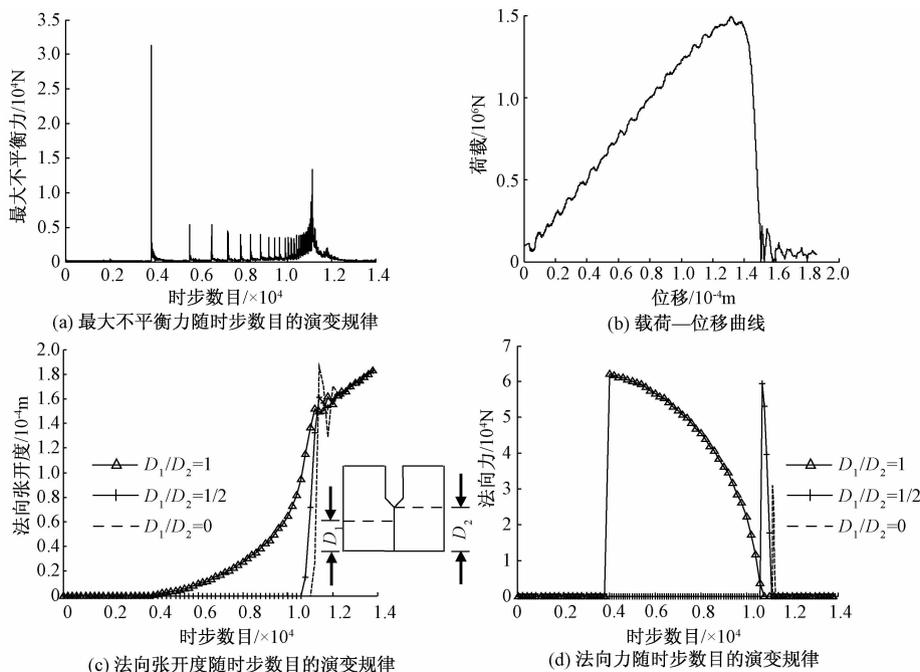


图7 方案3的各种力学量的演变规律

Fig. 7 Evolution of various mechanical variables in scheme 3

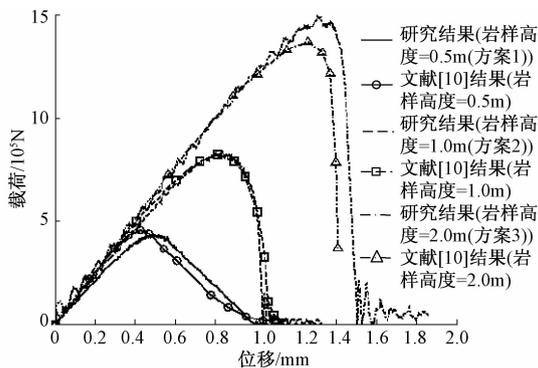


图8 载荷—位移曲线的对比

Fig. 8 Comparison of load-displacement curves

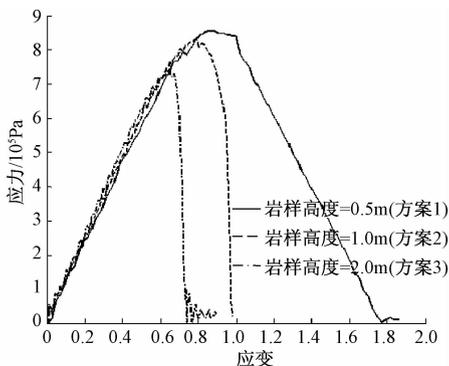


图9 不同岩样高度时应力—应变曲线

Fig. 9 Stress-strain curves for different heights of rock specimens

为 $4.375 \times 10^6 \text{ N}$ ，低于简化岩样峰值载荷的理论值。上述差异主要是由于简化的岩样未能考虑 V 形缺口的存在导致的岩样的渐近拉裂过程。实际上，V 形缺口下方各单元的应力分布并不均匀，节点的分离是由上向下传播的，而不是同时发生的，材料的强度不能同时得到发挥。所以，紧凑拉伸岩样的峰值载荷就要低于简化岩样的。

与方案1的结果类似，由方案2和方案3的结果可以发现，V形缺口下方节点每发生1次分离对应着1次最大不平衡力的突增现象（见图5a、图7a）。和方案1的结果相比，方案2和方案3的法向张开度—时步数目曲线（见图5c、图7c）、法向力—时步数目曲线（见图5d、图7d）具有更强的非线性特性；方案2和方案3中各条法向张开度—时步数目曲线汇聚过程中具有较强的波动性，且方案3的波动性大于方案2的。对于方案1，V形缺口下方各节点的法向张开度几乎同时达到 $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ （临界法向张开度）。也就是说，各分离节点的法向力几乎同时降为零。而对于方案3， $D_1/D_2 = 1$ 处节点首先达到 $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ ，随后， $D_1/D_2 = 1/2$ 处和 $D_1/D_2 = 0$ 处节点法向张开度先后达到 $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ 。方案3中各条法向张开度—时步数目曲线汇聚于法向张开度大于 $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ 时。此后，真实裂缝面上各分离节点具有相同的运动规律。

3b) 可以发现，通过数值计算得到的峰值载荷仅

由载荷一位移曲线(见图8中研究结果)可以发现,随着岩样尺寸的增大,载荷一位移曲线的峰前刚度逐渐增大,且该曲线的波动性逐渐增大;载荷一位移曲线表现出了一定程度的应变硬化现象;随着岩样尺寸的增大,峰值载荷逐渐增大,峰后载荷一位移曲线表现出更强的脆性。上述结果与固定裂缝模型的结果^[10]基本一致。

由不同岩样高度时应力-应变曲线(见图9)可以发现,随着岩样尺寸的增大,峰值应力逐渐降低,这与 Bazant 的尺度律^[17]相一致;峰后应力-应变曲线的陡峭程度增大,脆性明显增强。

目前针对紧凑拉伸岩样的计算结果是合理的,由此在一定程度上说明了提出的连续-非连续方法的突出能力。

3 结论

这种适于模拟地质体材料变形-拉裂过程的连续-非连续方法的实质是拉格朗日元法和虚拟裂缝模型的耦合。和连续介质方法相比,该方法可以模拟真实的拉裂现象,且不需要重新划分网络。和非连续方法相比,在未拉裂前该方法处理的是连续介质,具有较好的计算精度。为了展示该方法在连续介质向非连续介质转化模拟方面的能力,以紧凑拉伸岩样的变形-拉裂过程为例开展研究。研究发现:

紧凑拉伸岩样的变形-拉裂过程如下:首先,在岩样的V形缺口尖端附近出现最大主应力集中现象;然后,节点的应力超标,节点发生分离,虚拟或真实裂缝扩展,最大主应力始终集中于虚拟裂缝的尖端位置;最终,岩样被拉裂成两部分,岩样中的应力降为零。

虚拟裂缝的扩展与最大不平衡力的突增密切相关:最大不平衡力每突增1次对应着1个节点的分离。当节点发生分离后,随着时步数目的增加,最大不平衡力趋于降低。

随着岩样尺寸的增大,岩样的峰值载荷逐渐增大,脆性增强,强度逐渐降低,这与 Bazant 的尺度律相一致。

目前针对紧凑拉伸岩样的计算结果是合理的,由此在一定程度上说明了提出的连续-非连续方法的突出能力。

参考文献/References

- [1] 李浩,杨为民,黄晓,等.天水市麦积区税湾地震黄土滑坡特征及其形成机制[J].地质力学学报,2016,22(1):12~24.
LI Hao, YANG Weimin, HUANG Xiao, et al. Characteristics and deformation mechanism of Shuiwan seismic loess landslide in Maiji, Tianshui [J]. Journal of Geomechanics, 2016, 22(1): 12~24. (in Chinese with English abstract)
- [2] 甘建军,黄润秋,李前银,等.都江堰-汶川公路汶川地震次生地质灾害主要特征和形成机理[J].地质力学学报,2010,16(2):146~158.
GAN Jianjun, HUANG Runqiu, LI Qianyin, et al. Formation mechanism of geo-hazards triggered by Wenchuan M_s 8.0 earthquake along Dujiangyan-Wenchuan highway [J]. Journal of Geomechanics, 2010, 16(2): 146~158. (in Chinese with English abstract)
- [3] 袁进科,裴向军.汶川地震震裂山体裂缝变形特征与动力机制研究[J].防灾减灾工程学报,2015,35(6):848~855.
YUAN Jinke, PEI Xiangjun. Study on deformation characteristics and dynamic mechanism of shattered mountain fractures in Wenchuan earthquake [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35(6): 848~855. (in Chinese with English abstract)
- [4] 裴向军,黄润秋,李正兵,等.锦屏一级水电站左岸卸荷拉裂松弛岩体灌浆加固研究[J].岩石力学与工程学报,2011,30(2):284~288.
PEI Xiangjun, HUANG Runqiu, LI Zhengbing, et al. Research on grouting reinforcement of unloading fractured loose rock mass in left bank of Jinping I hydropower station [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(2): 284~288. (in Chinese with English abstract)
- [5] 杨洵,王挺,王兵.北京地铁王府井-东单区间无拉分析[J].兰州铁道学院学报(自然科学版),2000,19(3):18~21.
YANG Xun, WANG Ting, WANG Bing. The non-tensile-stress analysis of the subway from Wangfujing to Dongdan segment of Beijing [J]. Journal of Lanzhou Railway University (Natural Sciences), 2000, 19(3): 18~21. (in Chinese with English abstract)
- [6] 黄醒春.岩石力学[M].北京:高等教育出版社,2005.
HUANG Xingchun. Rock mechanics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2005. (in Chinese)
- [7] 王来贵,赵娜,刘建军,等.岩石(土)类材料拉张破坏有限元分析[M].北京:北京师范大学出版社,2011.
WANG Laigui, ZHAO Na, LIU Jianjun, et al. Finite element analysis of tension fracture for rock (geotechnical) materials [M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 2011. (in Chinese)
- [8] 常鑫,程远方,夏强平,等.一种模拟岩体裂纹扩展的三角

- 单元网格开裂技术 [J]. 中国石油大学学报 (自然科学版), 2015, 39 (3): 105 ~ 112.
- CHANG Xin, CHENG Yuanfang, XIA Qiangping, et al. A triangular mesh split method for simulating crack propagation in rock matrix [J]. *Journal of China University of Petroleum*, 2015, 39 (3): 105 ~ 112. (in Chinese with English abstract)
- [9] 何传永, 孙平. 非连续变形分析方法程序与工程应用 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- HE Chuanyong, SUN Ping. *Discontinuous deformation analysis method: programs and engineering applications* [M]. Beijing: China Water and Power Press, 2009. (in Chinese)
- [10] 张楚汉, 金峰, 侯艳丽, 等. 岩石和混凝土离散-接触-断裂分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- ZHANG Chuhan, JIN Feng, HOU Yanli, et al. *Discrete-contact-fracture analysis of rock and concrete* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese)
- [11] 倪克松, 甯尤军. DDA 子块体开裂模拟算法的优化与验证 [J]. *地下空间与工程学报*, 2014, 10 (5): 1017 ~ 1022, 1100.
- NI Kesong, NING Youjun. The optimization and validation of sub-block method for modeling rock fracturing within discontinuous deformation analysis framework [J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2014, 10 (5): 1017 ~ 1022, 1100. (in Chinese with English abstract)
- [12] 马江锋, 张秀丽, 焦玉勇, 等. 用非连续变形分析方法模拟冲击荷载作用下巴西圆盘的破坏过程 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2015, 34 (9): 1805 ~ 1814.
- MA Jiangfeng, ZHANG Xiuli, JIAO Yuyong, et al. Numerical simulation of Brazilian disc specimen failure under dynamic loading using discontinuous deformation analysis method [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2015, 34 (9): 1805 ~ 1814. (in Chinese with English abstract)
- [13] 侯艳丽, 张楚汉. 用三维离散元实现混凝土 I 型断裂模拟 [J]. *工程力学*, 2007, 24 (1): 37 ~ 43.
- HOU Yanli, ZHANG Chuhan. Mode I-fracture simulation of concrete based on 3D distinct element method [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24 (1): 37 ~ 43. (in Chinese with English abstract)
- [14] Lisjak A, Grasselli G. A review of discrete modeling techniques for fracturing processes in discontinuous rock masses [J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2014, 6 (4): 301 ~ 314.
- [15] 丁星, 彭小芹, 万朝均. 混凝土紧凑拉伸试样断裂稳定性分析 [J]. *重庆建筑大学学报*, 1998, 20 (1): 87 ~ 91.
- Ding Xing, PENG Xiaoqin, WANG Chaojun. Analysis of crack stability in compact tension concrete specimens [J]. *Journal of Chongqing Jianzhu University*, 1998, 20 (1): 87 ~ 91. (in Chinese with English abstract)
- [16] 邹广平, 沈昕慧, 赵伟玲, 等. SHTB 加载紧凑拉伸试样断裂韧性测试仿真 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2015, 36 (7): 917 ~ 921.
- ZHOU Guangping, SHEN Xinhui, ZHAO Weiling, et al. Numerical simulation of dynamic fracture toughness tests on the compact tension specimen loaded by SHTB [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2015, 36 (7): 917 ~ 921. (in Chinese with English abstract)
- [17] Bazant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete [J]. *Matériaux et Construction*, 1983, 16 (93): 155 ~ 177.