

DOI:10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202003065

非均匀多孔介质等效渗透率的普适表达式

张东, 刘晓丽, 王恩志

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 多孔介质渗流是普遍的物理过程, 涉及地下工程、地热开采、环境工程等各行各业, 尤其是工程建设, 常面临防渗问题。由于地质条件的复杂性, 工程区域地层受到成岩、压实、风化、生物作用等各种影响, 故渗流性质复杂, 常需要对建设区域的渗流状况进行数值模拟, 从而为工程的设计施工提供决策依据。数值仿真结果依赖于对地层介质关键参数的选取, 但目前工程多将其视为均匀介质处理, 对于介质的非均匀特性考虑较少。文章旨在研究非均质多孔介质渗透率空间分布与等效渗透率的关系。基于连续介质假定、达西定律以及非均匀多孔介质渗透率空间分布函数, 建立一维到三维的达西渗流问题模型, 通过求解偏微分方程和理论推导, 得到基于渗透率空间分布函数的等效渗透率理论表达式, 并与有限元计算的数值解进行对比分析, 结果表明理论值和数值解误差很小, 证明等效渗透率的表达式的合理性。利用该成果可通过多点局部渗透率的测定构建渗透率空间分布函数, 从而对整体渗流区域的渗透性质进行快速计算和评估, 从而简化异常复杂的工程地质模型以减少计算量需求, 对于工程仿真的快速计算和结果评估有重要意义。

关键词: 多孔介质; 达西定律; 连续介质; 渗透率分布函数; 数值模拟

中图分类号: TV139.14

文献标识码: A

文章编号: 1000-3665(2020)04-0035-08

A universal expression of the equivalent permeability of heterogeneous porous media

ZHANG Dong, LIU Xiaoli, WANG Enzhi

(State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Flow and transport inside porous media is a common physical process, and it is related to subsurface engineering, geothermal energy extraction, environment engineering and so on. Due to the complexity of geological conditions, strata suffer diagenesis, compaction, weathering, biological effect, etc. The feature of permeability is rather complex, and numerical simulation is utilized to supply data and key information for engineering design and construction, with a larger amount of time and computation. However, the accuracy of simulation directly relies on the key parameters such as permeability. This paper aims to study the relationship of the equivalent permeability and permeability distribution function in the space of heterogeneous porous media. Based on the continuum assumption, Darcy's law and permeability distribution function, the mathematical model of the Darcy seepage problem from 1D to 3D is established, and the theoretical solution of the equivalent permeability is obtained by solving the partial differential equation. Besides, the theoretical solution and the numerical solution are obtained by using finite element simulation. The results show that they are closed to each other, and the error is quite small, indicating that the expression of the equivalent permeability is correct and valid. The permeability distribution function can be established through multi-points permeability measurements of media, then the seepage properties of the whole porous media can be

收稿日期: 2020-03-20; 修订日期: 2020-05-12

基金项目: 国家重点研发计划项目(2018YFC1504800; 2018YFC1504902); 国家自然科学基金项目(51522903; 41772246)

第一作者: 张东(1996-), 男, 博士研究生, 主要从事孔隙级渗流研究工作。E-mail: 1528717360@qq.com

通讯作者: 刘晓丽(1978-), 男, 副教授, 博导, 主要从事水岩耦合及地下工程研究。E-mail: xiaoli.liu@tsinghua.edu.cn

simulated and evaluated rapidly. The complex geological models are simplified to reduce the computation with the expressions. It is of great significance for the rapid simulation of engineering and the evaluation of simulation results.

Keywords: porous medium; Darcy's law; continuum; permeability distribution function; numerical simulation

多孔介质渗流问题由来已久,与生活实际和工业生产都密切相关。Henry Darcy 在研究均匀砂柱问题时,提出了著名的达西定律,奠定了渗流学科的基础。在此基础之上,学者们针对地下水渗流问题相继提出了地下水运动基本微分方程、Dupuit 井稳定渗流公式等,促进了渗流学科的迅速发展^[1-2]。直到目前,多孔介质渗流问题仍然是重要而广泛的研究领域,包括孔隙模型和模拟、数值模拟方法改进、多孔介质的非均匀性、非线性渗流、多相流等,整体而言,更趋于微观尺度的非线性渗流性质和渗流过程中的化学-物理机理研究^[3-6]。微观尺度考虑多孔介质内部的细观结构,认为介质是非连续性的,存在主要的渗流和储水空间——孔隙和吼道,可以形成明显的渗流通道,计算时建立非连续介质模型,如毛细管束模型、孔隙网络模型等,采用 LBM、逾渗理论等方法,根据研究问题可能还会考虑毛细作用、浸润作用等,主要是岩石渗流问题,如油气开采及地热问题等^[7-11];而宏观尺度则忽略多孔介质的微观结构,认为大于一定尺度(多孔介质的表征单元体),其微观结构的渗透率趋于稳定,可以用渗透率来反映其渗透性能,认为多孔介质为连续介质,运动方程基于达西定律,多用于工程问题如地下工程、环境工程等。微观尺度的关注并不代表宏观大尺度计算不受重视,反而正如 Thomas 所总结的:“微观尺度的物理特性决定宏观尺度的模型”^[12],正是微观尺度的机理性研究,为宏观模型提供了改进的基础,一系列理论和方法如体积平均方法、混合理论等建立并运用^[13]。

纵观微观和宏观尺度研究,多孔介质的渗透性都是重要的研究指标,对于宏观实际工程问题,渗透率是数值计算的基础,渗透率的准确性直接决定模拟结果的精确度;而对于微观尺度研究,渗透率是评价介质特性的重要指标,也是联系宏观问题的纽带^[14-16]。渗流问题的多尺度和尺度差异性是一个重大挑战,尤其是工程大尺度模型所带来的巨大计算量,提高计算效率势在必行。

达西定律是线性渗流定律,其适用范围有限,一般认为砂性地下水渗流,在低雷诺数($Re < 10$)时服从达西定律^[17-19]。但大部分实际工程问题仍然以达西

定律作为基本假设进行处理简化^[20-22],而目前的商用软件如 MODFLOW 等许多模块也是基于达西定律而建立的^[23-24]。复杂的水文地质条件决定了多孔介质渗透性质在空间的不均匀分布特性,J Koestel 测量了某土壤层孔隙结构,发现由于压实和生物作用,1 m 内不同深度的土壤的渗透性差异很大^[25];水文地质勘探常采用测井法确定地层的渗透性,但试验范围局限于百米,只是整个工程地质模型的局部^[26]。因此,研究不均匀介质局部渗透率分布与整体等效渗透率的关系还是很有必要的。

本文基于连续介质的假定,考虑介质的不均匀性,推导多孔介质渗透率空间分布与总体等效渗透率的关系,并进行数值模拟计算的对比。

1 数学模型及验证

1.1 数学模型

本文的渗流模型可以概述为图 1 的物理模型,本研究仅以水平 x 方向的渗流特性为代表,左右边界分别为入口、出口,且都为压力边界,即典型的达西压降渗流问题。

压降法是达西渗流试验方法,试验时以水头表示,其本质即水头压力差驱动渗流发生,其模型示意图如图 1 所示。

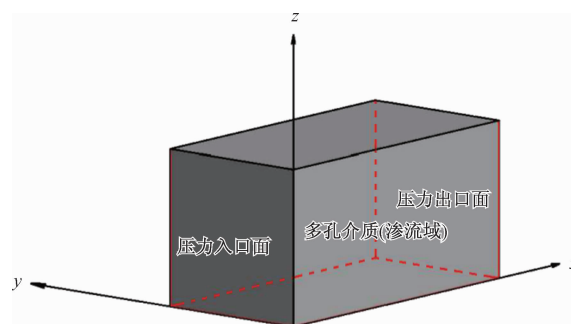


图 1 压降渗流试验示意图

Fig. 1 Diagram of the percolation with pressure drop

数值试验的目的在于得到多孔连续介质的等效渗透率。数值试验定义多孔介质渗透率分布函数 $\kappa(x, y, z)$ 是空间位置函数,在不同空间区域渗透率及其变化趋势不同,即建立了非均匀多孔介质模型,基于达西

定律探讨了渗透率空间分布与多孔介质总体等效渗透率的关系,并与 COMSOL 数值模拟的计算值进行了对比分析。

根据压降试验条件建立相应的数学模型(图2)。模型建立所采用的假定为:

(1)多孔介质为连续介质, L_x 、 L_y 、 L_z 为渗流域的 x 、 y 、 z 方向的长度;

(2)该渗流服从线性达西渗流定律;

(3)假设为饱和渗流,忽略重力作用;

(4)边界位置的速度很小,忽略边界的速度水头,故本研究仅仅考虑压力水头;

(5) x 、 y 和 z 方向为渗流主轴方向,即渗透率张量

$$\underline{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_z \end{bmatrix}, \text{ 仅考虑 } x \text{ 方向渗流(} y, z \text{ 方向渗流}$$

类似),故仅与 κ_x 有关,后面都以 κ 表示。

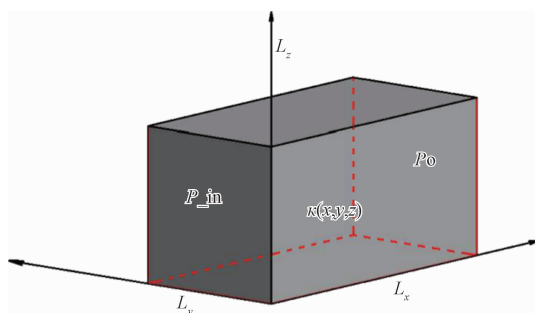


图2 压降渗流数学模型示意图

Fig.2 Diagram of the percolation mathematic model

根据上述假设,在多孔介质域内渗流满足达西定律^[27-28],即:

$$v = -K \nabla h, K = \kappa \frac{\gamma}{\mu} \quad (1)$$

式中: K ——渗透系数/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$),由介质和流体性质共同决定;

κ ——渗透率/ m^2 ,仅与多孔介质的几何结构有关,本文中采用渗透率作为研究指标;

∇h ——水力坡降;

v ——断面平均流速/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$);

μ ——流体动力粘滞系数/($\text{Pa} \cdot \text{s}$);

γ ——流体重度/($\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$)。

本文采用压降法模型,即压力差驱动渗流($\nabla p = \gamma \nabla H$),则达西定律变为:

$$\vec{v} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p \quad (2)$$

式中: $\vec{v}$ ——渗流速度场/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)。

本文仅计算该模型在 x 方向的等效渗透率 $\bar{\kappa}$,则整个渗流域的流量 Q 满足:

$$Q = \frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{\text{in}} - P_o}{L_x} L_y L_z \quad (3)$$

基于连续介质假定,则在渗流域内任意点(x_0, y_0, z_0)及其邻域可定义渗透率 $\kappa(x_0, y_0, z_0)$,即渗流域内可定义渗透率分布函数 $\kappa(x, y, z)$,渗流域数学模型可表达如下:

渗流域($0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$):

$$\vec{v} = -\frac{\kappa(x, y, z)}{\mu} \nabla p(x, y, z) \quad (4)$$

渗流边界:

$$1) x = 0: p = P_{\text{in}} \quad (5)$$

$$2) x = L_x: p = P_o \quad (6)$$

$$3) y = 0, y = L_y \text{ 或 } z = 0, z = L_z: -n p \vec{v} = 0 \quad (7)$$

式中: P_{in} ——入口压力/Pa;

P_o ——出口压力/Pa;

n ——边界的外法向量;

ρ ——流体密度/($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)。

1.2 数值模拟验证

对式(4)~(7)数值求解即可对渗流流域进行模拟,本文采用有限元 COMSOL 的达西渗流模块,其控制方程和式(2)一致。按照图2所示,设置相应的边界条件,采用自由四面体网格划分方法和 MUMPS 算法进行求解。采用不同单元尺寸进行网格剖分,得到一致的计算结果,表明计算结果不随网格尺寸变化。且对单次结果进行流量平衡分析,入口和出口的流量差值小于 10^{-9} m^3 ,可认为计算是准确可信的。

2 一维渗透率分布

考虑多孔连续介质域内 $\kappa(x, y, z)$ 仅仅与 x 位置有关,而在 y 和 z 方向不发生改变,可退化为一维渗透率分布函数 $\kappa(x)$ 。

将式(2)微分化,则在多孔连续介质域内任意一点(x_0, y_0, z_0)及其邻域满足:

$$v_{x_0} = -\frac{\kappa(x_0)}{\mu} \frac{dp}{dx} \bigg|_{x=x_0} \quad (8)$$

式中: v_{x_0} ——渗流域内任意一点(x_0, y_0, z_0)的 x 方向渗流速率。

结合一维渗流域达西定律并考虑流动的连续性,则有:

$$v_{x_0} = -\frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{\text{in}} - P_o}{L_x} \quad (9)$$

根据式(8)~(9)可以得到多孔连续介质一维渗透率分布与等效渗透率的关系表达式:

$$\bar{\kappa} = \frac{L_x}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x)} dx} \quad (10)$$

对于均匀多孔介质,渗透率分布函数 $\kappa(x)$ 为常数 κ , 即 $\bar{\kappa} = \kappa$, 显然满足式(10)。特别地, 当一维渗流且介质存在局部区域 $\kappa = 0$ 时, 式(10)在数学上无意义, 但存在极限值 $\bar{\kappa} = 0$ 。

由不同渗透率的介质串联拼接形成的孔隙介质称为复合多孔介质。由 2 种不同渗透率的介质串联形成的复合介质以数学语言表达, 即: $0 \leq x \leq \alpha L_x$ 区域的介质渗透率为 κ_1 , 在 $\alpha L_x < x \leq L_x$ 区域的介质渗透率为 κ_2 , 也即 $\kappa(x)$ 为分段函数。则根据式(10)可以得到:

$$\bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 \kappa_2}{\alpha(\kappa_2 - \kappa_1) + \kappa_1} \quad (11)$$

当两种孔隙介质的尺寸相同 ($\alpha = 0.5$), 即 $\bar{\kappa} = \frac{2\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_2 + \kappa_1}$ 。

采用 COMSOL 有限元法进行渗流数值模拟计算, 计算几何模型如图 2 所示, 其中 $L_x = 10 \text{ m}$ 、 $L_y = 5 \text{ m}$ 、 $L_z = 5 \text{ m}$ 、 $P_{\text{in}} = 1000 \text{ Pa}$ 、 $P_o = 0$ 。此外设定不同区域的渗透率参数: $\kappa_1 = 4 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ 、 $\kappa_2 = 8 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ (下同), 以对比验证基于式(10)所得到的推论式(11)。

考虑两种不同渗透率的介质串联形成的复合多孔介质, 改变取值并分别利用 COMSOL 和式(11)计算得到等效渗透率, 计算结果如表 1 所示, 相应的曲线如图 3 所示。

表 1 渗透率分段分布函数计算参数及计算结果

Table 1 Piecewise permeability distribution function and the calculated parameters and results

α	模拟计算值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	理论值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	相对误差/%
0	8.000	8.000	0
0.1	7.286	7.273	1.787
0.2	6.673	6.667	0.089
0.3	6.161	6.154	0.113
0.4	5.725	5.714	0.192
0.5	5.333	5.333	-0.003
0.6	5.001	5.000	0.020
0.7	4.709	4.706	0.063
0.8	4.448	4.444	0.089
0.9	4.209	4.211	-0.047
1.0	4.000	4.000	0

对于 $n(n > 2)$ 种或以上串联所形成的复合介质亦可根据式(10)求解, 当 n 趋近无穷时, $\kappa(x)$ 即为连续

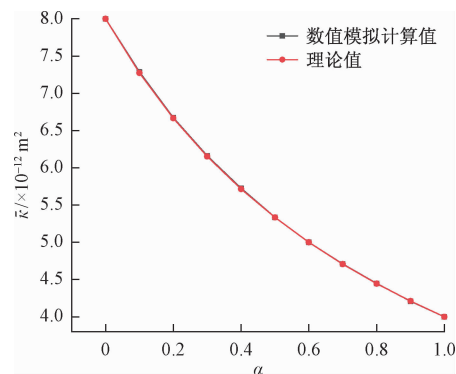


图 3 数值模拟计算值与理论值对比曲线

Fig.3 Numerical and analytical solutions

函数。本文中设置 $\kappa(x)$ 为不同形式的连续函数, 分别利用 COMSOL 和式(10)计算得到等效渗透率结果如表 2 所示 (其中部分渗透率分布函数难以直接得到数学理论解, 则利用 MATLAB 进行数值积分求解 (下同))。一维渗透率分布函数条件下等效渗透率的理论值和模拟计算值的误差小于 2%, 考虑数值计算的误差, 可以认为两者的结果相当吻合, 理论推导式(10)是准确的。

表 2 渗透率连续分布函数计算参数及计算结果

Table 2 Continuous permeability distribution function and the calculated parameters and results

渗透率分布函数	模拟计算值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	理论值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	相对误差/%
$-x + 12$	5.581	5.572	0.016
$x^2 + 1$	6.883	6.774	1.604
$x^3 + 1$	8.344	8.270	0.894
e^{-x}	4.507×10^{-4}	4.518×10^{-4}	-0.243

3 二维渗透率分布

考虑多孔连续介质域内 $\kappa(x, y, z)$ 仅仅与 x 和 y 位置有关, 而在 z 方向不发生改变, 可退化为二维渗透率分布函数 $\kappa(x, y)$ 。则在点 (x_0, y_0, z_0) 的 x 方向渗透率满足:

$$v_{x_0} = - \frac{\kappa(x_0, y_0) dp}{\mu dx} \bigg|_{(x, y) = (x_0, y_0)} \quad (12)$$

则在 $x = x_0$ ($\forall x_0 \in [0, L_x]$) 断面平均流量为:

$$q_x = \int_0^{L_y} v_x dy \quad (13)$$

对多孔介质渗透域整体使用达西定律, 则有:

$$q_x = \frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{\text{in}} - P_o}{L_x} L_y \quad (14)$$

根据流动连续性, 则得到二维渗透率分布的等效渗透率满足:

$$\frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} L_y = - \int_0^{L_y} \left. \frac{\bar{\kappa}(x,y)}{\mu} \frac{dp}{dx} \right|_{x=x_0} dy \quad (15)$$

显然式(15)是基于 $x = x_0$ 的一系列方程,但压力分布函数 $p = p(x,y)$ 与 $\kappa(x,y)$ 密切相关,难以事先确定,因此式(15)难以直接求得理论解。因此,此处利用上一节的推导结论来简化推导二维渗流率分布函数与等效渗透率的关系。

采用沿 y 方向分层渗流的方法来考虑二维渗流问题。在 $y = y_0$ 及其邻域 $y \in y_0 \pm \frac{1}{2}\Delta y$ 层,根据式(10)可以得到该层的等效渗透率:

$$\bar{\kappa}|_{y=y_0} = \frac{L_x}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x,y)} dx} \quad (16)$$

对该层使用达西定律,则得到该层的断面平均流量:

$$q|_{y=y_0} = \frac{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x,y)} dx}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} \Delta y \quad (17)$$

则对于整个多孔连续介质区域的断面平均流量,即各分层渗流平均流量的总和,有:

$$q_x = \int_0^{L_y} q|_{y=y_0} dy = \int_0^{L_y} \frac{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x,y)} dx}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} dy \quad (18)$$

根据流动连续性则可得到二维渗透率分布函数与等效渗透率的关系式:

$$\bar{\kappa} = \frac{L_x}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x,y)} dx} dy \quad (19)$$

对于均匀的各向同性介质,域内的渗透率分布函数 $\kappa(x,y) = \kappa$ 为常数,不随位置变化而变化,即 $\bar{\kappa} = \kappa$,显然满足式(19)。

对于不同渗透率的介质并联拼接形成的介质可以用数学语言表达,即 $0 \leq x \leq \alpha L_x$ 区域的介质渗透率为 κ_1 ,在 $\alpha L_x < x \leq L_x$ 区域的介质渗透率为 κ_2 , $\kappa(x,y)$ 可表达为分段函数,则根据式(19)可以得到:

$$\bar{\kappa} = \alpha(\kappa_1 - \kappa_2) + \kappa_2 \quad (20)$$

当两种介质的尺寸相同时 ($\alpha = 0.5$),即 $\bar{\kappa} = 0.5(\kappa_2 + \kappa_1)$ 。

考虑两种不同渗透特性的多孔介质并联模型,改变 α 的取值并分别利用 COMSOL 渗流模拟和式(20)

计算得到等效渗透率,计算结果如表 3 所示,相应曲线见图 4。

表 3 渗透率二元分段分布函数计算参数及计算结果
Table 3 Binary continuous permeability distribution function and the calculated parameters and results

α	模拟计算值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	理论值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	相对误差/%
0	8.000	8.000	0
0.1	7.607	7.600	0.092
0.2	7.218	7.200	0.250
0.3	6.803	6.800	0.044
0.4	6.390	6.400	0.186
0.5	6.001	6.000	0.012
0.6	5.617	5.600	0.296
0.7	5.203	5.200	0.053
0.8	4.787	4.800	-0.275
0.9	4.373	4.400	-0.618
1.0	4.000	4.000	0

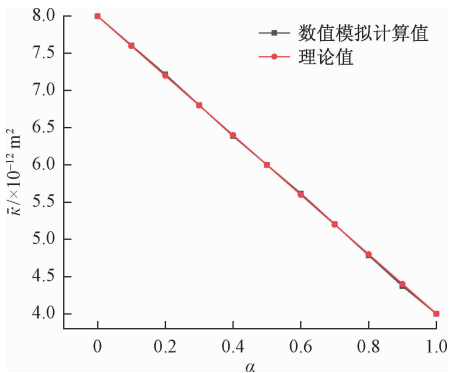


图 4 数值模拟计算值与理论值对比曲线
Fig.4 Numerical and analytical solutions

对于 $n(n > 2)$ 种或以上并联所形成的复合介质亦可根据式(19)求解,当 n 趋近无穷时即为连续函数。本文中设置为不同形式的二元连续函数,分别利用 COMSOL 和式(19)计算得到等效渗透率结果(表 4)。

二维渗透率分布函数条件下等效渗透率的理论值和模拟计算值的误差小于 5%,考虑数值计算的误差,可以认为两者的结果相当吻合,理论推导式(19)是准确的。

表 4 渗透率二元连续分布函数计算参数及计算结果
Table 4 Binary continuous permeability distribution function and the calculated parameters and results

渗透率分布函数	模拟计算值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	理论值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	相对 误差/%
$x + y + 1$	7.346	7.346	0.002
$x^2 + y^2 + 1$	23.261	22.415	3.774
$x^3 + y^3 + 1$	80.179	76.723	4.504
e^{x+y}	284.260	294.850	3.591

4 三维渗透率分布

考虑多孔连续介质域内 $\kappa(x, y, z)$ 在 x, y, z 方向都具有差异性,则在点 (x_0, y_0, z_0) 的 x 方向渗透速率满足:

$$v_x = - \frac{\kappa(x_0, y_0, z_0)}{\mu} \frac{dp}{dx} \bigg|_{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0)} \quad (21)$$

则在 $x = x_0$ ($\forall x_0 \in [0, L_x]$) 断面平均流量为:

$$q_x = \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} v_x dy dz \quad (22)$$

对多孔介质整体使用达西定律,则有:

$$q_x = \frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} L_y L_z \quad (23)$$

根据流动连续性则得到三维渗透率分布的等效渗透率满足:

$$\frac{\bar{\kappa}}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} L_y L_z = - \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \frac{\kappa(x, y, z)}{\mu} \frac{dp}{dx} \bigg|_{x=x_0} dy dz \quad (24)$$

同上,式(24)难以直接求得理论解。因此,此处利用上一节的推导结论来简化推导三维渗透率分布函数与等效渗透率的关系。

采用沿 z 方向分层渗流的方法来考虑三维渗流问题。在 $z = z_0$ 及其邻域 $z \in z_0 \pm \frac{1}{2} \Delta z$, 也就是 $z = z_0$ 的 $x - y$ 二维平面渗流,根据式(19)可以得到该层的等效渗透率:

$$\bar{\kappa}|_{z=z_0} = \frac{L_x}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x, y, z)} dx} dy \quad (25)$$

对该层使用达西定律,则得到该层的断面平均流量为:

$$q|_{z=z_0} = \frac{\frac{L_x}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x, y, z)} dx} dy}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} L_y \Delta z \quad (26)$$

则对于整个多孔连续介质区域的断面平均流量即各分层渗流平均流量的总和为:

$$\begin{aligned} q_x &= \int_0^{L_z} q|_{z=z_0} dz \\ &= \int_0^{L_z} \frac{\frac{L_x}{L_y} \int_0^{L_y} \frac{1}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x, y, z)} dx} dy}{\mu} \frac{P_{in} - P_o}{L_x} L_y dz \end{aligned} \quad (27)$$

根据流动连续性则可得到三维渗透率分布函数与等效渗透率的关系式:

$$\bar{\kappa} = \frac{L_x}{L_z L_y} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \frac{1}{\int_0^{L_x} \frac{1}{\kappa(x, y, z)} dx} dy dz \quad (28)$$

对于均匀的各向同性介质,域内的渗透率分布函数 $\kappa(x, y, z) = \kappa$ 为常数,不随位置变化而变化,即 $\bar{\kappa} = \kappa$, 显然满足式(28)。

构建三维非均匀多孔介质,其渗透率分布函数如式(29)所示。

$$\kappa(x, y, z) = \begin{cases} 0 \leq y \leq \alpha L_y, 0 \leq z \leq \beta L_z & \kappa_1 \\ \alpha L_y < y \leq L_y, 0 \leq z \leq \beta L_z & \kappa_2 \\ 0 \leq y \leq \alpha L_y, \beta L_z < z \leq L_z & \kappa_3 \\ \alpha L_y < y \leq L_y, \beta L_z < z \leq L_z & \kappa_4 \end{cases} \quad (29)$$

根据式(28),可以得到理论解:

$$\bar{\kappa} = \alpha \beta \kappa_1 + (1 - \alpha) \beta \kappa_2 + \alpha (1 - \beta) \kappa_3 + (1 - \alpha) (1 - \beta) \kappa_4 \quad (30)$$

显然,当 $\beta = 1$ 时,即该三维多孔介质沿 z 方向维持不变,则退化为二维渗流,式(30)退化为 $\bar{\kappa} = \alpha \kappa_1 + (1 - \alpha) \kappa_2$, 显然与二维渗流条件下所得理论表达式(20)一致。

根据建立的非均匀多孔介质模型,改变 α, β 的取值并分别利用 COMSOL 和式(30)计算得到等效渗透率,计算结果如图5所示,理论值和模拟计算值几乎完全重合,误差极小。

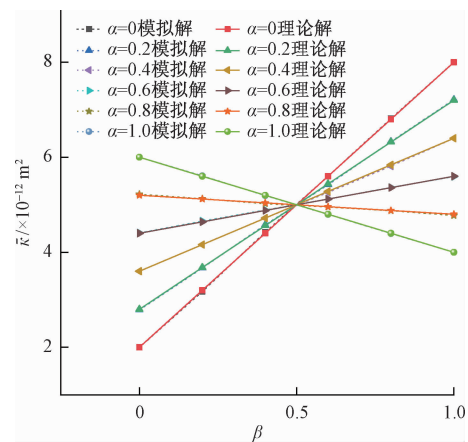


图5 数值模拟计算值与理论值对比曲线

Fig.5 Numerical and analytical solutions

本文中设置 $\kappa(x, y, z)$ 为不同形式的三元连续函数,分别利用 COMSOL 和式(28)计算得到等效渗透率结果(表5)。

三维渗透率分布函数条件下等效渗透率的理论值和模拟计算值的误差小于 5%,考虑数值计算的误差,可以认为两者的结果相当吻合,理论推导公式(28)是准确的。

表 5 渗透率三元连续分布函数计算参数及计算结果
Table 5 Trinary continuous permeability distribution function and the calculated parameters and results

渗透率分布函数	模拟计算值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	理论值/ $\times 10^{-12} \text{ m}^2$	相对 误差/%
$x + y + z + 1$	10.017	10.179	-1.588
$x^2 + y^2 + z^2 + 1$	35.602	34.784	2.359
$x^3 + y^3 + z^3 + 1$	137.810	132.118	4.308
e^{-x+y+z}	0.380	0.397	-4.210
$\ln(x + y + z + 2)$	2.404	2.410	-0.249
$1/(x + y + z + 1)$	0.097	0.095	0.105

5 结论

(1)针对一维、二维、三维渗流模型,基于连续介质假设和达西定律,通过理论推导得到了等效渗透率的理论表达式;

(2)针对不同区域简单常数 $\kappa(x,y,z)$ 分布,即不同渗透特性的多孔介质的串并组合模型,发现理论表达式和数值解误差小于 5%,充分表明理论推导的准确性;

(3)进一步设定了非线性 $\kappa(x,y,z)$ 分布,对比分析了理论值和数值模拟解,相对误差也很小,证明了理论表达式的准确性,但随着非线性的增加,误差逐渐增大,这是由于数值计算是通过线性求解所导致的。

本文所构建的非均匀多孔介质等效渗透率理论表达式,为简化复杂地质模型,减少计算量,为快速计算模拟提供了理论支持,还有利于模拟计算结果的合理性快速评估。此外,本文所设定的渗透率分布函数都比较简单,针对实际情况构建复杂的渗透率分布函数以及其对于等效渗透率的影响还有待更进一步的研究。

参考文献 (References):

[1] 王艳华,潘争伟,张劼,等. 多孔连续介质渗透定律及其扩展[J]. 赤峰学院学报(自然科学版),2015, 31(7):32-34. [WANG Y H, PAN Z W, ZHANG J, et al. Permeation law of porous continuous media and its extension[J]. Journal of Chifeng University (Natural Science Edition), 2015, 31(7): 32-34. (in Chinese)]

[2] 黄琨. 孔隙介质渗流基本方程的探索[D]. 武汉:中

国地质大学(武汉),2012. [HUANG Q. Exploration of the fundamental equation of percolation in Porous Media[D]. Wuhan:China University of Geosciences (Wuhan), 2012. (in Chinese)]

[3] NÄGEL A, LOGASHENKO D, SCHRODER J B, et al. Aspects of solvers for large-scale coupled problems in Porous Media[J]. Transport in Porous Media, 2019, 130(1):363-390.

[4] BILKE L, FLEMISCH B, KALBACHER T, et al. Development of open-source Porous Media simulators; principles and experiences[J]. Transport in Porous Media, 2019, 130:77-104.

[5] GERAMI A, ALZAHID Y, MOSTAGHIMI P, et al. Microfluidics for porous systems: fabrication, microscopy and applications[J]. Transport in Porous Media, 2019, 130:277-304.

[6] HERNANDEZ MA, ROJAS F, LARA V H. Nitrogen-sorption characterization of the microporous structure of clinoptilolite-type zeolites[J]. Journal of Porous Materials, 2000, 7:443-454.

[7] WANG M R, WANG J K, PAN N, et al. Mesoscopic predictions of the effective thermal conductivity for microscale random porous media[J]. Physical Review E(Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics), 2007, 75(3):3-10.

[8] JAFARI A, BABADAGLI T. Estimation of equivalent fracture network permeability using fractal and statistical network properties[J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2012, 92/93:110-123.

[9] AKER E, JØRGEN MÅLØY K, HANSEN A, et al. A two-dimensional network simulator for two-phase flow in porous media[J]. Transport in Porous Media,1998, 32(2):163-186.

[10] 雷健,潘保芝,张丽华. 基于数字岩心和孔隙网络模型的微观渗流模拟研究进展[J]. 地球物理学进展,2018, 33(2):653-660. [LEI J, PAN B Z, ZHANG L H. Research progress of micro-seepage simulation based on digital core and pore network model[J]. Progress in geophysics, 2018, 33(2): 653-660. (in Chinese)]

[11] 郑启斌,高楚桥,赵彬. 数字岩心建模方法及应用综述[J]. 能源与环境,2017, 39(12):145-148. [ZHENG Q B, GAO C Q, ZHAO B. Overview of Digital Core Modeling Methods and Applications[J]. Energy and Environmental Protection, 2017, 39(12): 145-148. (in Chinese)]

[12] RAMSTAD T, BERG C F, THOMPSON K. Pore-

- scale simulations of single-and two-phase flow in porous media: approaches and applications [J]. *Transport in Porous Media*, 2019, 130:77 – 104.
- [13] BATTIATO I, FERREROV P T, MALLEY D O, et al. Theory and applications of macroscale models in porous media[J]. *Transport in Porous Media*, 2019, 130:5 – 76.
- [14] SONG R, WANG Y, LIU J J, et al. Comparative analysis on pore-scale permeability prediction on micro-CT images of rock using numerical and empirical approaches [J]. *Energy Science & Engineering*, 2019, 7(6):2842 – 2854.
- [15] LAI J, WANG G W, CAO J, et al. Investigation of pore structure and petrophysical property in tight sandstones [J]. *Marine and Petroleum Geology*, 2018, 91:179 – 189.
- [16] HAO L, CHENG P. Pore-scale simulations on relative permeabilities of porous media by lattice Boltzmann method[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, 53(9/10):1908 – 1913.
- [17] SCHEIDEGGER A. Theoretical models of porous matter[J]. *Producers Monthly*, 1953, 17(10):17.
- [18] BEAR J, ZASLAVSKY D, IRMAY S. Physical principles of water percolation and seepage [J]. *Unesco Arid Zone Research*, 1968, 29:465.
- [19] FATT I. The networkmodel of fractured permeable media[J]. *Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers*, 1965, 207:144 – 181.
- [20] 姚怡光,张云,孙铁,等. 人工渗流场中的地下水流数值模拟[J]. *水力发电*, 2017, 43(5):25 – 29. [YAO Y G, ZHANG Y, SUN T, et al. Numerical simulation of an artificial seepage field of groundwater [J]. *Water Power*, 2017, 43(5):25 – 29. (in Chinese)]
- [21] 吕克璞. 地下水渗流问题及其有限元数值模拟[J]. *西北师范大学学报(自然科学版)*, 1998, 34(2):38 – 44. [LYU K Z. Groundwater seepage problem and its finite element numerical simulation [J]. *Journal of Northwest Normal University (Natural Science)*, 1998, 34(2):38 – 44. (in Chinese)]
- [22] 黄立明,陈征宙,张崇波,等. 成层介质边坡渗流稳定性计算方法初步研究[J]. *水文地质工程地质*, 2015, 42(3):59 – 63. [HUANG L M, CHEN Z Z, ZHANG C B, et al. A preliminary study of the calculation method for seepage stability in the layered slope [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2015, 42(3):59 – 63. (in Chinese)]
- [23] 童少青,董艳辉,王礼恒. 非结构化网格 MODFLOW 模拟方法与应用[J]. *水文地质工程地质*, 2016, 43(2):9 – 16. [TONG S Q, DONG Y H, WANG L H. Methods and applications of an unstructured grid version of MODFLOW: MODFLOW-USG [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2016, 43(2):9 – 16. (in Chinese)]
- [24] 魏亚强,乔小娟,李国敏. MODFLOW 不同算法及参数设定对计算精度的影响[J]. *水文地质工程地质*, 2015, 42(1):14 – 21. [WEI Y Q, QIAO X J, LI G M. Influence on calculation accuracy caused by different algorithms and parameters in MODFLOW [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2015, 42(1):14 – 21. (in Chinese)]
- [25] KOESTEL J, LARSBO M, JARVIS N. Scale and REV analyses for porosity and pore connectivity measures in undisturbed soil [J]. *Geoderma*, 2020, 366:2 – 12.
- [26] 畅俊斌,柯贤敏,王玮,等. 渗流井辐射管-含水层间水量交换数值模拟研究[J]. *水文地质工程地质*, 2018, 45(5):1 – 8. [CHANG J B, KE X M, WANG W, et al. Numerical simulation of the water exchange between radiant tube and aquifer in a seepage well [J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2018, 45(5):1 – 8. (in Chinese)]
- [27] 杨昱. 饱和和非饱和渗流基本微分方程的推导[J]. *河南水利与南水北调*, 2015(14):76 – 79. [YANG W. Derivation of basic differential equations for saturated unsaturated seepage [J]. *Henan Water Resources and South-to-North Water Transfer*, 2015(14):76 – 79. (in Chinese)]
- [28] FRIEDMAN S P, SEATON N A. Critical path analysis of the relationship between permeability and electrical conductivity of three-dimensional pore networks[J]. *Water Resources Research*, 1998, 34(7):1703 – 1710.

编辑:汪美华