DOI:10. 16030/j. cnki. issn. 1000-3665. 202006058

Dupuit 模型的改进——具入渗补给

陈崇希

(中国地质大学(武汉)环境地质研究所,湖北 武汉　430074)

摘要: Dupuit(1863 年)提出的模型是"圆岛状含水层稳定井流模型",这个模型只有侧向湖海边界条件,而不涉及上边界降水入渗补给条件。因此,Dupuit 模型只能在旱季用于地下水井流试验求取含水系统的参数,而不能够用于预测。文章发展 Dupuit 潜水井流模型,考虑地面均匀稳定入渗补给(蒸发排泄示为其负值)作用。以质量守衡原理为基础,假定渗流服从 Darcy 定律并满足 Dupuit 假定,建立极坐标下的地下水流微分方程,再依边界条件建立相应的流量方程和水位方程。这些方程为具地面入渗补给条件下井流试验求取水文地质参数以及预测相应条件下地下水抽水的效果,提供了基础条件。讨论了引入 Dupuit 假定对本问题解析研究可以降维(略去 z 变量)带来好处的同时,在地下水分水岭附近及抽水井附近可能出现偏离 Dupuit 假定,建议在抽水试验求取含水层参数时,观测孔的部署要尽量回避这些区段。

关键词: Dupuit 模型;解析模型;圆岛模型;影响半径;稳定井流;入渗补给

中图分类号: P641. 2　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-3665(2020)05-0001-04

Improvement of Dupuit model: with infiltration recharge

CHEN Chongxi

(*Institute of Environmental Geology, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan, Hubei* 430074, *China*)

Abstract: The model proposed by Dupuit (1863) is a "steady well flow model of Round Island aquifer". The Dupuit model only considers lateral boundary conditions, and the upper boundary precipitation infiltration recharge condition is not considered. Therefore, Dupuit model can only be used in the dry season to obtain the parameters of aquifer system by groundwater well flow test, but can't be used to predict groundwater dynamic. In this paper, the Dupuit model of groundwater well flow is developed to consider the effect of uniform and steady infiltration recharge (evaporation and discharge shows negative value). Based on the principle of mass balance, assuming that the groundwater flow obeys Darcy's law and satisfies Dupuit's assumption, the differential equation of groundwater flow in polar coordinates is established, and then the corresponding discharge equation and water level equation are established according to the boundary conditions. These equations can be used to calculate hydrogeological parameters by well flow test under the condition of precipitation infiltration recharge, and to predict the effect of groundwater pumping under the corresponding conditions. It is discussed that the introduction of Dupuit hypothesis can bring benefits to the analytical study of this problem, which can reduce the dimension (omitting z variables). At the same time, it may deviate from the Dupuit assumption near the groundwater ridge and the pumping well. It is suggested that these areas should be avoided in the arrangement of observation holes when the aquifer parameters are obtained by pumping test.

Keywords: Dupuit model; analytical model; round island model; influence radius; steady well flow; infiltration recharge

---

收稿日期: 2020-06-30; **修订日期:** 2020-08-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目"Dupuit 模型及 Theis 模型的改进——具入渗补给条件及其拓展探索"(41972263)

第一作者: 陈崇希(1933-),男,教授,博士生导师,主要从事地下水科学及工程领域的地下水流解析和数值模拟方面的教学与科研。E-mail:ccx33@126.com

1 研究背景

本文所述的 Dupuit 模型[1]是 1863 年最初提出的模型,即“圆岛状含水层稳定井流模型”[2],而非“无界含水层中影响半径稳定井流模型”,即方程中的 R 是圆岛半径,而非影响半径。后者的地下水流是不可能形成稳定状态的[2-3]。

经典的 Dupuit 潜水稳定井流模型(1863 年),只有侧向的圆岛外边界(湖海)及抽水井井壁内边界,而不涉及上边界降水入渗补给。如此一旦抽水,经过一定时间之后必导致海(湖)水入侵。然而自然条件大多存在大气降水的入渗补给,这样一来,Dupuit 模型基本上只能在旱季用于地下水井流试验求取含水系统的参数,而不能够用于预测。人们往往企望截取大气降水补给地下水的开采模式,然而经典的 Dupuit 稳定井流模型却没有这个功能。就此而言,这是一个非常大的缺憾。

本文试图发展上述 Dupuit 圆岛状含水层稳定井流模型,即考虑地面入渗补给(蒸发排泄视为其负值)作用。如此,可用新建模型来预测相应条件的地下水开采、排泄的效果。

所讨论的问题为稳定均匀入渗的条件,其它条件与 Dupuit 圆岛状潜水含水层井流模型相同。

2 解析模型的建立

2.1 假设条件及基本方程

(1)假设条件

隔水底板水平的均质圆岛状潜水层,上边界具稳定均匀入渗补给,外边界是定水位条件,抽水井位于圆岛中心。此条件下,地下水为径向(轴对称)稳定流,以潜水层底面为基准面,取柱坐标系统(图 1),且以井心隔水底面处为原点;由于地下水动力学井流中的流量通常定义抽水流量为正值,故记流速向井(原点)为正。

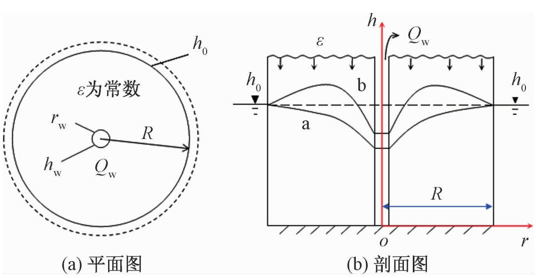

图 1 具入渗补给的圆岛潜水稳定井流模型

Fig. 1 Steady well flow model of phreatic water in Round Island with infiltration recharge

a—$\varepsilon=0$ 条件下的 Dupuit 下降漏斗曲线;b—$\varepsilon>0$ 条件下的漏斗曲线

(2)基本方程

依水量守恒原理,假定渗流服从 Darcy 定律并满足 Dupuit 假定,任一 r 断面的流量 Q 的计算公式为:

$$Q = Q_w - (\pi r^2 - \pi r_w^2)\varepsilon \approx Q_w - \pi r^2 \varepsilon \quad (\text{当 } r \gg r_w) \tag{1}$$

$$Q_R = Q_w - \pi R^2 \varepsilon \tag{2}$$

式中:r_w——井半径;

R——圆岛半径;

Q_w——抽水井流量;

ε——入渗强度(单位时间单位面积入渗水量)。

若 Dupuit 假定成立,则任一断面流量 Q 为:

$$Q = 2\pi r K h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} \tag{3}$$

式中:K——渗透系数;

h——潜水位(等于潜水层厚度)。

2.2 流量方程及物理意义

(1)流量方程

将式(3)代入式(1),得

$$2\pi r K h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r} = Q_w - \pi r^2 \varepsilon$$

积分后得

$$\int_{h_w}^{h} h\,\mathrm{d}h = \frac{Q_w}{2\pi K}\int_{r_w}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{r} - \frac{\varepsilon}{2K}\int_{r_w}^{r} r\,\mathrm{d}r$$

$$\frac{1}{2}(h^2 - h_w^2) = \frac{Q_w}{2\pi K}\ln\frac{r}{r_w} - \frac{\varepsilon}{2K}\cdot\frac{1}{2}(r^2 - r_w^2) \tag{4}$$

得

$$Q_w = \frac{\pi K(h^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{r}{r_w}} + \frac{\varepsilon\pi(r^2 - r_w^2)}{2\ln\dfrac{r}{r_w}} \tag{5}$$

若取 $r=R\gg r_w$,则 $h=h_0$,上式可改写为:

$$Q_w = \frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon\pi R^2}{2\ln\dfrac{R}{r_w}} \tag{6}$$

(2)物理意义

Q_w 由两部分组成:第一部分即无入渗补给条件的 Dupuit 流量方程,表示内外边界对 Q_w 的贡献;另一部分表示入渗补给对 Q_w 的贡献。

将式(6)代入式(2),得外边界的流量为:

$$Q_R = \frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon\pi R^2}{2\ln\dfrac{R}{r_w}} - \pi R^2 \varepsilon$$

$$= \frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln \frac{R}{r_w}} + \pi R^2 \varepsilon \left(\frac{1}{2\ln \frac{R}{r_w}} - 1 \right) \quad (7)$$

若 $Q_R > 0$，则外边界补给地下水（水位面如图 1 中的 a 曲线）；若 $Q_R = 0$，则外边界与地下水间互不补排；若 $Q_R < 0$，则外边界排泄地下水，这时存在地下水分水岭（水位线如图 1 中的 b 曲线所示）。

将式(6)代入式(1)，得任意断面的流量：

$$Q = \frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln \frac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon \pi R^2}{2\ln \frac{R}{r_w}} - \varepsilon(\pi r^2 - \pi r_w^2) \quad (8)$$

2.3 水位方程及地下水分水岭

(1)水位方程

由式(4)整理得

$$h^2 = h_w^2 + \frac{Q_w}{\pi K}\ln \frac{r}{r_w} - \frac{\varepsilon}{2K}(r^2 - r_w^2) \quad (9)$$

或将式(6)中 Q_w 代入式(9)，得

$$h^2 = h_w^2 + \frac{\ln \frac{r}{r_w}}{\pi K}\left(\frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln \frac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon \pi R^2}{2\ln \frac{R}{r_w}} \right) - \frac{\varepsilon}{2K}(r^2 - r_w^2)$$

$$= h_w^2 + (h_0^2 - h_w^2)\frac{\ln \frac{r}{r_w}}{\ln \frac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon R^2}{2K} \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_w}}{\ln \frac{R}{r_w}} - \frac{\varepsilon}{2K}(r^2 - r_w^2) \quad (10)$$

这就是水位曲线方程。

由式(9)，若 $Q_w = 0$ 且 $r_w \to 0$，则得未抽水时圆岛天然潜水位的分布：

$$h^2 = h_{r=0}^2 - \frac{\varepsilon}{2K}r^2 \quad (11)$$

当 $r = R$ 时，$h = h_0$，则有

$$h_{r=0}^2 = h_0^2 + \frac{\varepsilon}{2K}R^2 \quad (12)$$

此即未抽水时，位于圆岛中心处的最高潜水位。

将式(12)代入式(11)，得

$$h^2 = h_0^2 + \frac{\varepsilon}{2K}(R^2 - r^2) \quad (13)$$

(2)地下水分水岭

由于

$$\frac{dh}{dr} = \frac{Q_w}{2\pi rhK} - \frac{\varepsilon r}{2hK}$$

当 $\frac{dh}{dr} = 0$ 时，其 r 为地下水分水岭的位置 r_a，即

$$r_a^2 = \frac{Q_w}{\pi\varepsilon} \quad (14)$$

其物理意义十分明确，抽水井的流量来自于地下水分水岭以内的入渗补给量。

定义抽水条件下地下水的分水岭位置为 r_a，其相应水位为 h_a。

由式(8)，在 $Q = 0$ 处，$r = r_a$，有

$$0 = \frac{\pi K(h_0^2 - h_w^2)}{\ln \frac{R}{r_w}} + \pi\varepsilon\left(\frac{R^2}{2\ln \frac{R}{r_w}} - r_a^2 + r_w^2 \right)$$

$$r_a^2 = \frac{K(h_0^2 - h_w^2)}{\varepsilon \ln \frac{R}{r_w}} + \frac{R^2}{2\ln \frac{R}{r_w}} + r_w^2 \quad (15)$$

在 $r = r_a$ 处，$h = h_a$，由式(9)可得 h_a 公式：

$$h_a^2 = h_w^2 + \frac{Q_w}{\pi K}\ln \frac{r_a}{r_w} - \frac{\varepsilon}{2K}(r_a^2 - r_w^2) \quad (16)$$

式(6)的 Q_w 代入式(16)或者直接由式(10)可得由边界水位、含水层参数及入渗强度表示的潜水分水岭的水位：

$$h_a^2 = h_w^2 + (h_0^2 - h_w^2)\frac{\ln \frac{r_a}{r_w}}{\ln \frac{R}{r_w}} + \frac{\varepsilon R^2}{2K} \cdot \frac{\ln \frac{r_a}{r_w}}{\ln \frac{R}{r_w}} - \frac{\varepsilon}{2K}(r_a^2 - r_w^2) \quad (17)$$

3 解析方程的基本用途

3.1 求取含水层渗透系数 K 及入渗强度 ε

根据不抽水条件下一个观测孔的数据 r、h，利用式(13)求得综合性参数 $\frac{\varepsilon}{K}$：

$$\frac{\varepsilon}{K} = \frac{2(h^2 - h_0^2)}{R^2 - r^2} \quad (18)$$

做一次抽水试验（含 1 个观测孔），利用式(9)，而已知 $r = r_1$、$h = h_1$、h_w、Q_w 及 $\frac{\varepsilon}{K}$（由未抽水条件下 1 个观测孔的数据所得），可求得 K 及 ε。

事实上，将式(18)代入式(9)可得

$$h^2 = h_w^2 + \frac{Q_w}{\pi K}\ln \frac{r}{r_w} - \frac{(h^2 - h_0^2)}{R^2 - r^2}(r^2 - r_w^2) \quad (19)$$

由此，当 $r = r_1$、$h = h_1$ 时，可以解得

$$K = \frac{Q_w}{\pi}\ln \frac{r_1}{r_w} / \left[h_1^2 - h_w^2 - \frac{(h_1^2 - h_0^2)}{R^2 - r_1^2}(r_1^2 - r_w^2) \right] \quad (20)$$

3.2 计算不同条件下的水位及流量

在已知参数 $\frac{\varepsilon}{K}$ 的条件下，利用式(12)，可计算圆

岛中心处的未抽水条件下的最高水位 $h_{r=0}$。

若已知参数 K 及 ε,给定 Q_w,则可利用式(6)计算 h_w;反之亦然。

若令 $Q_w = \pi R^2 \varepsilon$,则依式(6)计算的 h_w,是截取全部入渗补给量的抽水井中的水位。

3.3 有关 Dupuit 假定及应用新公式注意事项的初步讨论

在建立解析方程的过程中,假设满足 Dupuit 假定。引入 Dupuit 假定,对本问题解析研究可以降维(略去 z 变量)而使有关方程变得简单明了。然而实际上,在某些 r 断面上是会出现偏离 Dupuit 假定的,主要在地下水分水岭附近。这一点,Bear(1972 年)[4]有过相关的讨论。即使没有入渗补给的原始 Dupuit 模型,如果潜水含水层厚度与圆岛半径之比较大,且当抽水井水位降深与潜水含水层厚度之比较大时,在抽水井附近也会出现偏离 Dupuit 假定。已知非完整抽水井附近的三维流,向外逐渐转变为二维流(忽略 z 分量),此径距 r 大约是含水层厚度的 1.5 倍[3]。借助这一研究成果,估计 Dupuit 假定(忽略 z 分量)不满足的地段,可能小于含水层厚度的 1.5 倍。上述种种偏离 Dupuit 假定对解析结果影响的定量分析,还需要进一步研究。

认识到 Dupuit 假定在某些区段可能会有所偏离,那么在抽水试验求取含水层有关参数时,观测孔的部署要尽量回避这些区段。

4 结论及讨论

(1)对 Dupuit 圆岛稳定井流模型做了改进,即考虑垂向入渗补给(蒸发示为其负值)作用,建立了新模型相关的流量方程及水位方程。当所建的新方程中的入渗强度 ε 取值为零时,其方程蜕变为经典的 Dupuit 方程。

(2)讨论了新的解析方程的基本用途。新模型可以用于求取含水层渗透系数 K、入渗强度 ε 等参数。

(3)有关 Dupuit 假设对所建方程的影响做了初步讨论,对抽水试求取水文地质参数的观测孔部署也提出建议。

(4)至于新模型要求入渗是均匀稳定的,在应用中怎么考虑?这个问题是解析模型的一个普遍问题,不仅限于这个新模型。例如,经典的具有入渗的河间地区模型[3],它的入渗也是均匀稳定的。然而在自然界,一般入渗是不均匀,不稳定的,应用中怎么办?至今没有见到讨论。实际上,当今已经广泛使用的数值模拟是可以用来研究此问题的,即做大量的不同尺度和不同参数的组合进行模拟研究,以此可以得出解析方程近似应用的条件。但此项研究是下个课题的任务。

地下水井流问题,这是当今地下水动力学理论和应用最主要的课题之一。从 1863 年的 Dupuit 稳定井流模型问世到今天的 150 多年里,发展了 Theis 不稳定井流模型、越流系统井流模型、各类潜水井流模型、二元结构含水系统井流模型等,这么重要的井流问题,尚没见到一个已考虑自然界地下水系统不可或缺的入渗补给条件的。因此,作为初次研究有入渗补给的井流问题,我们是从 Dupuit 稳定井流模型,而且其入渗是均匀且稳定的简单条件开始。后续还有多个课题有待学者们研究。笔者期待更多创新成果出现。

参考文献(References):

[1] DUPUIT A J E J. Etudes theoretiques et pratiques sur le mouvement des eaux[M]. Paris : Dunod,1863.

[2] 陈崇希.地下水不稳定井流计算方法[M].北京:地质出版社,1983.[CHEN C X. Calculation method of unsteady well flow of groundwater [M]. Beijing: Geological Publishing House,1983.(in Chinese)]

[3] 陈崇希,林敏,成建梅.地下水动力学[M].5 版.北京:地质出版社, 2011. [CHEN C X, LIN M, CHENG J M. Groundwater dynamics[M]. 5th ed. Beijing: Geological Publishing House, 2011. (in Chinese)]

[4] BEAR J.多孔介质流体动力学[M].李竞生,陈崇希,译.北京:中国建筑工业出版社,1983. [BEAR J. Fluid dynamics in porous media[M]. LI J S,CHEN C X, trans. Beijing: China Architecture & Building Press,1983.(in Chinese)]

编辑:汪美华