中文核心期刊 中科双效期刊 CSCD核心期刊 中国科技核心期刊

Caj-cd规范获奖期刊

#### 孔隙介质非达西渗流Forchheimer方程量化评价

袁 帅,李仲夏,熊 涛,杨 ,王宗星

Quantitative evaluation of forchheimer equation for non-darcy flow in porous media

YUAN Shuai, LI Zhongxia, XIONG Tao, YANG Yun, and WANG Zongxing

在线阅读 View online: https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202308015

## 您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

### 非均匀多孔介质等效渗透率的普适表达式

A universal expression of the equivalent permeability of heterogeneous porous media 张东, 刘晓丽, 王恩志 水文地质工程地质. 2020, 47(4): 35–42

#### 考虑孔隙水微观赋存形态的非饱和粉土有效应力方程及其验证

An effective stress equation for unsaturated silt considering the microstructure of pore water and its verification 曾立峰, 邵龙潭, 牛庚, 郭晓霞 水文地质工程地质. 2022, 49(4): 37–46

#### 井内嵌入同轴多孔与固体圆柱地下水渗流流型分析

Flow pattern analysis around a solid cylinder with both porous and water rings in porous media 朱琳, 雷海燕, 马非, 戴传山 水文地质工程地质. 2021, 48(4): 25–31

#### 多孔介质界面对重非水相液体迁移过程影响的图像法研究

Investigation on the influence of porous media interface on DNAPL migration based on image methods 刘汉乐, 郝胜瑶, 马建初 水文地质工程地质. 2019, 46(5): 169–174

#### 南方小型岩溶流域与非岩溶流域的释水过程及径流组分差异

Variations in discharge processes and runoff components between small karst watersheds and non-karst watersheds in Southern China 王泽君, 周宏, 罗明明, 郭绪磊, 蔡志强 水文地质工程地质. 2019, 46(3): 27–27

#### Theis不稳定潜水井流模型的改进——具入渗补给

Improvement of the Theis unsteady well flow model with infiltration recharge in a phreatic aquifer 陈崇希, 唐仲华 水文地质工程地质. 2021, 48(6): 1–12



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

#### DOI: 10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202308015

袁帅,李仲夏,熊涛,等. 孔隙介质非达西渗流 Forchheimer 方程量化评价 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(3): 12-22. YUAN Shuai, LI Zhongxia, XIONG Tao, et al. Quantitative evaluation of forchheimer equation for non-darcy flow in porous media[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2024, 51(3): 12-22.

# 孔隙介质非达西渗流 Forchheimer 方程量化评价

袁 帅,李仲夏,熊 涛,杨 赟,王宗星2

- (1. 中国地质大学(武汉)环境学院,湖北武汉 430074:
- 2. 中南勘测设计研究院有限公司,湖南长沙 410014)

摘要: Forchheimer 方程作为非达西渗流中广泛应用的基本方程之一, 方程中A、B系数的确定一直是孔隙介质渗流领域中的热点及难点, 不同学者根据渗流试验结果提出了不同的 Forchheimer 方程A、B系数的经验公式, 但对于均质以及混合粒径的非均质条件下评价各经验公式适用性的研究较少。因此在渗流阻力试验的基础上, 采用归一化目标函数和线性回归法评价了 Forchheimer 方程经验公式的适用性, 为不同孔隙介质条件下 Forchheimer 方程经验公式的选取提供参考。结果表明: 对于均质孔隙介质, Sidiropoulou 公式对水力梯度有着很好的预测效果; 对于 2 种混合粒径孔隙介质, 在使用平均粒径的基础上, 还应考虑混合粒径的质量比和大小因素, Macdonald 公式的预测效果受混合粒径的质量比和大小影响较小, Kadlec and Knight 公式对于水力梯度的预测结果较为稳定; 对于 5 种混合粒径孔隙介质, 使用  $d_{60}$  作为特征粒径进行预测的效果较好, Kadlec and Knight 公式对于系数 A 的预测效果较好, Ergun 公式对于系数 B 的预测效果较好。研究结果能够为工程中均质及非均质松散砂砾石孔隙介质渗流计算的 Forchheimer 方程的选取提供依据。

关键词: 孔隙介质; Forchheimer 方程; 非达西流; 量化评价; 经验方程

中图分类号: P641.2 文献标志码: A 文章编号: 1000-3665(2024)03-0012-11

# Quantitative evaluation of forchheimer equation for non-darcy flow in porous media

YUAN Shuai<sup>1</sup>, LI Zhongxia<sup>1</sup>, XIONG Tao<sup>1</sup>, YANG Yun<sup>1</sup>, WANG Zongxing<sup>2</sup>
(1. School of Environmental Studies, China University of Geosciences (Wuhan), Hubei, Wuhan 430074, China;
2. Zhongnan Engineering Corporation Limited, Changsha, Hunan 410014, China)

**Abstract:** The Forchheimer equation is one of the basic equations widely used in non-Darcy seepage. The determination of coefficients A and B in the equation has always been a hotspot and difficulty in the field of porous media seepage. Different studies have proposed various empirical formulas for the coefficients A and B from seepage experiments. However, there are few studies evaluating the applicability of each empirical formula under homogeneous condition and heterogeneous with mixed particle size. In this study, to provide basic information for selecting the empirical formula of the Forchheimer equation under different porous media conditions, the normalized objective function (NOF) and linear regression method are used to evaluate the applicability of the empirical formula of the Forchheimer equation, on the basis of the seepage resistance experiment. The results

收稿日期: 2023-08-05; 修订日期: 2023-09-13 投稿网址: www.swdzgcdz.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(41402204);中央高校基本科研业务费专项资金项目(CUG170410)

第一作者: 袁帅(1999—), 男, 硕士研究生, 主要从事地下水渗流研究。 E-mail: shuai\_yuan@cug.edu.cn

通讯作者:李仲夏(1990—), 男, 副教授, 主要从事地下水渗流的教学与科研工作。E-mail: zhongxia\_li@cug.edu.cn

show that: for homogeneous porous media, Sidiropoulou's formula has a good prediction effect on hydraulic gradient. For the porous media mixed two kinds of particle size, the mass ratio and size factors of the mixed particle size should be considered based on the average particle size. The prediction effect of the Macdonald formula is slightly affected by the mass ratio and the mixed particle size; while the predicted hydraulic gradient from the Kadlecan and Knight formula is relatively stable. As to the porous media mixed five kinds of particle size, the predictive effect of using  $d_{60}$  as the characteristic particle size is fine. The Kadlecan and Knight formula is suitable to predict coefficient A, and the Ergun formula is effective to predict coefficient B. This study can provide a basis for selecting the Forchheimer equation for seepage of homogeneous and heterogeneous loose sand and gravel porous media in engineering.

Keywords: porous media; Forchheimer equation; non-Darcy flow; quantitative evaluation; empirical equation

非达西流是指任何偏离达西线性关系的渗流<sup>[1]</sup>。由于达西定律是基于渗流假定,将地下水渗流简化为穿过固体岩土颗粒的直线运动,而在实际岩土空隙中地下水流动是复杂弯曲运动,非均质的孔隙结构也会影响介质的渗透系数<sup>[2-3]</sup>,所以导致线性渗透定律的计算结果与实际存在一定误差,在一些工程实践中也发现孔隙介质中地下水渗流规律并不服从达西线性定律<sup>[4-6]</sup>。非达西流的提出和讨论开始于 20 世纪初,提出 Forchheimer 方程<sup>[7]</sup>:

$$J = AV + BV^2 \tag{1}$$

式中:  $A \times B$  — 与流体性质和渗透介质孔隙结构有关的常数;

J---水力梯度;

V---渗透流速。

描述非达西渗流的另一个常用方程为 1931 年由 苏联学者 Izbash 提出的幂指数方程:

$$J = aV^m, \quad 1 \le m \le 2 \tag{2}$$

其中, a为常数; m的值取决于流态的变化。

Forchheimer 方程可以基于 Navier-Stokes 方程<sup>[8]</sup> 从理论上进行推导,不同学者也对 Forchheimer 方程形式的合理性进行了佐证<sup>[9-11]</sup>。由于 Forchheimer 方程各项的物理意义更加明确,其适用范围也更加广泛,大量室内渗流试验和实际工程都证明了 Forchheimer 方程在孔隙介质中有很好的应用<sup>[12-18]</sup>,不同学者针对 Forchheimer 方程开展了大量研究<sup>[19-20]</sup>,在 Forchheimer 方程的基础上,提出了系数A和B的经验表达式,且方程中的系数A和B被认为是与流体性质和渗透介质孔隙结构有关的常数<sup>[21]</sup>。

Ergun 通过开展不同气体在压实砂床模型中的渗 流阻力试验,在考虑液体流动速率、流体物理属性以 及孔隙率、孔隙介质通道方向、尺寸、形状的基础上, 对 Forchheimer 方程进行了修正,提出非线性渗流的确定性方程——Ergun 公式<sup>[19]</sup>:

$$J = 150 \frac{v}{g} \frac{(1-n)^2}{n^3 d^2} V + 1.75 \frac{(1-n)}{n^3} \frac{1}{gd} V^2$$
 (3)

式中: n——多孔介质的孔隙度;

d——孔隙介质中平均粒径的尺寸;

g---重力加速度;

v——运动黏滞系数。

Ergun 公式明确推导出了方程系数与孔隙介质尺寸、孔隙度以及运动黏滞系数之间的定量关系。

Irmay<sup>[20]</sup>在假想的等径球粒模型的基础上,将 Kozeny-Caman公式作为渗透率的计算公式,对 Ergun 公式进行修正,提出更适合于松散介质的非线性方程:

$$J = 180 \frac{v}{g} \frac{(1-n)^2}{n^3 d^2} V + 0.6 \frac{(1-n)}{n^3} \frac{1}{gd} V^2$$
 (4)

Kovács<sup>[22]</sup> 通过分析雷诺数在 10~100 范围的 300 组渗流试验数据,推导了均匀分散球形颗粒介质的近似方程:

$$J = 144 \frac{v}{\varrho} \frac{(1-n)^2}{n^3 d^2} V + 2.4 \frac{(1-n)}{n^3} \frac{1}{\varrho d} V^2$$
 (5)

Macdonald 等[23] 通过分析孔隙度为 0.33 ~ 0.92 的 玻璃珠、砂和砾石介质的渗流试验数据, 修正了 Ergun 公式:

$$J = 180 \frac{v}{g} \frac{(1-n)^2}{n^{3.6} d^2} V + 1.8 \frac{(1-n)}{n^{3.6}} \frac{1}{gd} V^2$$
 (6)

Kadlec and Knight<sup>[24]</sup>修正了 Ergun 公式, 并建议采用以下方程估算:

$$J = 225 \frac{v}{g} \frac{(1-n)}{n^{3.7} d^2} V + 2 \frac{(1-n)}{n^3} \frac{1}{g d} V^2$$
 (7)

Sidiropoulou 等<sup>[25]</sup> 对包括经验公式(3)(5)(7)在内的多组渗流试验数据进行回归分析,并提出了方程系

数A、B新的经验公式:

$$A = 0.003 \ 333d^{-1.500403}n^{0.060350}$$

$$B = 0.194 \ 325d^{-1.265175}n^{-1.141417}$$
(8)

通过对比不同经验公式间的差异,可以看出不同经验公式的区别主要体现在系数A、B的常数项值、孔隙度和平均粒径的幂次值中。其原因为不同的经验公式在渗流试验中采用的介质粒径大小、形状、均匀程度间存在差异,导致不同经验公式拟合渗流试验的系数A、B存在差异。

Forchheimer 方程作为非达西渗流中广泛应用的基本方程之一,方程中系数A、B的确定一直是孔隙介质渗流领域中的热点及难点[ $^{26}$ ]。为了将其应用到非达西流模拟的解析解或数值解中,确定系数A、B的精确值是前提条件[ $^{27}$ ],一般系数A、B可以通过实验室开展的孔隙介质一维渗流阻力试验获取。然而,在试验中确定系数A和B的值十分困难,进一步明确 Forchheimer方程系数的物理意义及其影响因素,评估已有系数A、B经验公式的适用性十分必要。

不同学者采用不同的评价方法针对方程系数进 行了评价,评估各经验公式预测系数的有效性。Sidiropoulou等[25] 通过收集前人的试验数据,采用系数 A、 B的归一化目标函数 (normalized objective function, NOF)和线性回归法 2个标准,评估了经验公式(3)(5) (7)的适用性,并在此基础上提出了系数  $A \setminus B$  与孔隙 度、粒径拟合度最好的经验公式(8)。Salahi 等[28] 对 6种不同粒径的圆粒和角粒多孔介质进行了渗流阻力 试验, 并使用 NOF 法对经验公式(3)(5)(7)(8)进行评 估。Moutsopoulos 等[29] 依托 454 组试验数据, 对 4 种 粒径特征值下 $(d_{10}, d_{20}, d_{30}, d_{50})$ 经验公式(3)(5)(7)和 Ward<sup>[30]</sup> 公式的适用性进行了评估。Huang 等<sup>[31]</sup> 选 取 4 种不同粒径的丙烯酸小球开展了立方体排列孔 隙介质渗流试验,得到的试验数据采用均方根误差 (root mean squared error, RMES)作为标准对经验公式 (3)(4)(5)(6)进行评估,结果表明 Irmay 公式的效果 最佳。Sedghi-Asl等[32]对6种均质粒径的圆形冲积物 进行了高速非达西渗流试验,并使用 NOF 法对公式 (3)(5)(8)和 Ergun-Reichelt 4 种经验公式进行评估, 但 其未考虑非均质条件下各经验公式的拟合效果。Dan 等[3]对不同级配和压实度的路基碎石材料进行了渗 流试验,通过 NOF 法对经验公式(3)(5)(7)进行了评 估,结果表明 Ergun 公式对于不同级配材料的水力梯 度预测更为准确。针对非均质孔隙介质部分学者开 展了相关研究, Shi 等[34] 对 4 种不同级配粒径的碎屑

石灰岩开展了渗流试验,使用 NOF 标准评估了经验公式(3)(5)(7)和 Salahi 公式预测水力梯度的准确性,结果表明 Salahi 公式预测结果较准确。Van 等[35] 开展了从中砂粒径到砾石范围的 20 种均匀级配孔隙介质渗流阻力试验,使用矩算术法计算的平均粒径( $d_m$ )与粒标准偏差 s 的差值作为新的特征粒径评估包括式(3)(4)(5)(6)(7)(8)在内的多个经验公式的适用性,但其仅考虑了均匀级配条件下特征粒径选取对各经验公式预测结果的影响。

不同学者提出的经验公式源自不同孔隙介质类型和流速范围的渗流试验,且对孔隙几何形状进行了不同程度的假设和简化,试验数据的数量和质量对推导公式的精度也有一定的影响。因此,不同经验公式的适用性不尽相同,如何选取最佳的经验公式估算 Forchheimer 方程系数成为非达西渗流后续研究中的难点。本文通过开展一系列均质、非均质孔隙介质渗流试验,采用归一化目标函数和线性回归法评估确定 Forchheimer 方程系数 *A、B* 的 6 种经验公式(Ergu、Irmay、Kovacs、Macdonald、Kadlec and Knight、Sidiropoulou)的适用性,为孔隙介质非达西渗流 Forchheimer 方程系数确定提供参考。

#### 1 渗流阻力试验

#### 1.1 试验装置

为了获取不同孔隙介质条件下高精度的渗流试验数据,本文改进了原达西渗流试验装置,改进后的试验装置主要由供水系统、试验管段和测流系统3部分组成。试验管段是由有机玻璃制成,本次设计的试验管段长1.5 m, 横截面直径为0.1 m,并且在管壁处设置3个压力传感器监测压力变化,其中2个压力点与试验管的两端距离0.5 m,每个测压点相距0.25 m,并且在进口处固定有滤网起消能作用,避免进口效应的影响。测流系统中,在靠近侧壁的圆柱形测量水箱底部通过硅胶管连接压力传感器监测不同时间段的水位变化,实现流量数据的高精度测量,试验装置见图1。

# 1.2 试验设计

试验管段填充的石英砂样品分为均质和非均质 2 大类。均质孔隙介质的制备采用了筛分法(选用 0.90, 1.25, 1.70, 2.00, 3.00, 3.34 mm 的样品筛)对不同 粒径的石英砂进行分离、清洗、烘干,得到 5 种标准尺 寸的石英砂,5 组单一粒径均质孔隙介质的平均粒径  $(d_{50})$ 分别为 1.075, 1.475, 1.850, 2.500, 3.170 mm。对应

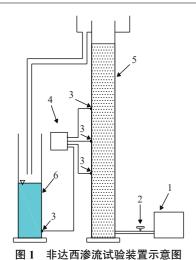


Fig. 1 Schematic diagram of non-Darcy seepage test device 1—供水装置; 2—阀门; 3—压力传感器; 4—数据采集器;

K装直; 2─阅门; 3─压刀传感器; 4─数据米集器 5─试验管段; 6─测流水箱

编号依次为 H1-1 至 H1-5(表 1)。

非均质孔隙介质分为 2 个系列: (1)将以上得到的 5 种单一粒径石英砂分别按照 7:3、5:5、3:7 的质量比两两混合,配置成 12 组 2 种粒径混合的非均质孔隙介质,对应编号依次为 H2-1 至 H2-12,具体见表 2; (2)控制不均匀系数,将 5 种单一粒径石英砂按照不同质量全部混合,配置成 9 组含 3 种平均粒径和 3 种不均匀系数( $C_u$ )的非均质孔隙介质,对应的试验编号依次为 H3-1 至 H3-9,具体见表 2。

为了方便与均质孔隙介质试验结果进行对比,在配比时需保证两者的平均粒径相同,其中不均匀系数  $(C_{\rm u})$ 为:

$$C_{\rm u} = \frac{d_{60}}{d_{10}} \tag{9}$$

式中:  $d_{10}$ 、 $d_{60}$  — 粒径分布曲线上分别小于某粒径含量 10%、60% 时所对应的粒径。

此外,为了降低孔隙度的影响,在填充试验管段 石英砂时,确保使用固定质量的石英砂填充相同的固 定高度,本次开展均质与非均质孔隙介质渗流阻力试 验的孔隙度控制在 0.36。

# 2 渗流阻力试验结果

通过开展均质、非均质孔隙介质渗流试验,得到不同渗透流速条件下水力梯度的变化情况如图 2 所示。

对图 2 中的试验数据按照 Forchheimer 方程的形式进行拟合,拟合结果如表 1 和表 2 所示。根据拟合结果可以看出使用 Forchheimer 方程的拟合效果最好,且决定系数值( $R^2$ )均大于 0.99,因此当前试验条件下

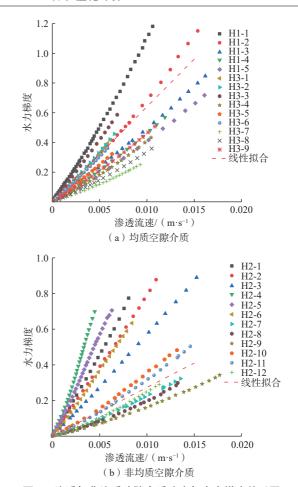


图 2 均质与非均质孔隙介质速度与水力梯度关系图

Fig. 2 V-J diagram in the homogeneous and heterogeneous porous media

的孔隙介质渗流已属于非达西渗流。不同类型孔隙 介质渗流阻力试验参数特征值见表1和表2。

表 1 均质孔隙介质渗流阻力试验特征值

Table 1 Experimental characteristic value of seepage resistance in the homogeneous porous media

编号	1./	$J = AV + BV^2$				
	$d_{50}$ /mm	A	В	$R^2$		
H1-1	1.075	90.411	1 973.4	0.999 9		
H1-2	1.475	57.596	1 122.6	0.9997		
H1-3	1.850	56.67	397.92	0.9997		
H1-4	2.500	39.264	689.46	0.999 6		
H1-5	3.170	33.163	724.69	0.9998		

# 3 不同类型 Forchheimer 方程评价与讨论

不同类型孔隙介质(均质、非均质)渗流阻力试验数据采用归一化目标函数和线性回归法评估不同类型孔隙介质非达西流 Forchheimer 方程经验公式及其系数的适用性。

#### 表 2 非均质孔隙介质渗流阻力试验特征值

Table 2 Experimental characteristic value of seepage resistance in the heterogeneous porous media

		ne 2 Exper	innental char	acteristic var		resistance in the i	ileter ogeneou	- por ous me	·uia	
编号	$d_{50}$ /mm		$J = AV + BV^2$		一 混合粒径/mm 质量比					
3m 7	<i>a</i> <sub>50</sub> /11111	A	B	$R^2$		据日型江州		灰玉比		
H2-1	1.31	85.74	1 106.89	0.999 9					7:3	
H2-2	1.46	76.98	203.3	0.999 9		1.075, 1.850			5:5	
H2-3	1.62	53.88	294.13	0.999 9					3:7	
H2-4	1.70	113.27	10 424.5	0.999					7:3	
H2-5	2.12	97.42	3 803.17	0.9998		1.075, 3.175			5:5	
H2-6	2.54	67.84	970.01	0.999 5					3:7	
H2-7	2.25	17.18	510.19	0.998 9					7:3	
H2-8	2.51	13.59	628.74	0.999 5		1.850, 3.175			5:5	
H2-9	2.77	12.23	398.62	0.9997					3:7	
H2-10	1.98	28.17	683.36	0.999 3					7:3	
H2-11	2.32	24.02	728.96	0.999 5		1.475, 3.175			5:5	
H2-12	2.66	16.85	808.05	0.999 6					3:7	
		$J = AV + BV^2$								
编号	$d_{50}$ /mm	A	В	$R^2$	$d_{10}/\text{mm}$	$d_{60}$ /mm	$d_{\scriptscriptstyle  m m}/{ m mm}$	S	$d_{ ext{m-s}}/ ext{mm}$	$C_{\mathrm{u}}$
H3-1		53.68	2 323.68	0.999 9	0.8	1.15	1.37	0.48	0.9	1.4
H3-2	1.075	59.71	1 520.56	0.9997	0.8	1.52	1.97	1	0.9	1.9
H3-3		78.21	1 043.18	0.999 9	0.8	1.85	1.82	0.92	0.96	2.3
H3-4		31.13	982.2	0.999 49	1.12	1.6	2.03	0.78	1.25	1.4
H3-5	1.475	45.47	866.62	0.999 86	0.75	1.55	2.04	0.91	1.01	1.9
H3-6		55.5	1 057.16	0.999 86	0.75	1.75	1.64	0.63	1.13	2.3
H3-7		19.77	776.06	0.999 8	1.475	2.05	2.44	0.76	1.68	1.4
H3-8	1.85	25.05	866.72	0.999 9	1.075	2.05	2.32	0.89	1.55	1.9
H3-9		37.54	853.48	0.999 9	0.91	2.05	2.38	0.83	1.43	2.3

注: $d_n$ 为矩算术法计算的平均粒径;s为标准偏差; $d_n$ 。为矩算术法平均粒径与标准偏差的差值的新特征粒径。

归一化目标函数法由系数预测值的均方根误差 与试验值的整体平均值之比组成:

$$I_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}{N}}$$
 (10)

$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$
 (11)

$$I_{\text{NOF}} = \frac{I_{\text{RMSE}}}{X} \tag{12}$$

式中:  $I_{RMSE}$  — 均方根误差, 计算值越接近 0 表明预测的整体误差越小;

 $I_{NOF}$ ——归一化目标函数值;

X---试验数据总的平均值;

N——试验数据数量;

 $x_i$ 、 $y_i$  — 系数A、B的试验值和经验公式的计算值。 归一化目标函数值越接近 0 表明经验公式对系数的预测效果越好,然而当归一化目标函数值小于 1 时,各经验公式对系数的预测依然准确可靠。 线性回归法是将系数的试验值与计算值以散点 图的形式表示,当所有数据点都落在斜率为1且过原 点的直线上时,表明试验值与计算值相等,计算值的 预测效果理论上最精确,当计算值偏离试验值时,偏 离的程度用斜率(γ)表征:

$$\gamma = \frac{y}{x} \tag{13}$$

式中: x、y——系数A、B的试验值和经验公式的计算值。 y越接近 1 表示经验公式的预测效果越好, 当y小 于 1 时表明经验公式的计算值与试验值相比偏小, 当 y大于 1 时表明经验公式的预测值偏大。

#### 3.1 均质孔隙介质不同类型方程评价

对不同粒径均质孔隙介质的 Forchheimer 方程开展量化评价,本文使用平均粒径( $d_{50}$ )作为孔隙结构的特征长度计算各经验公式的A、B系数。采用归一化目标函数和线性回归法 2 种方法对均质孔隙介质中各经验公式的预测效果进行综合评估。评估结果如图 3 和图 4 所示。

归一化目标函数法中, Forchheimer 方程系数A的

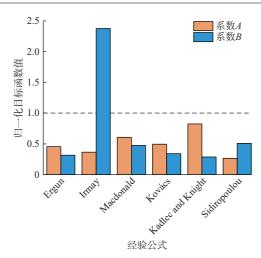


图 3 不同经验公式下 Forchheimer 方程系数A与B的归一化目标 函数值变化图

Fig. 3 Variation normalized objective function value of of coefficients A and B in the Forchheimer equation under different empirical formulas

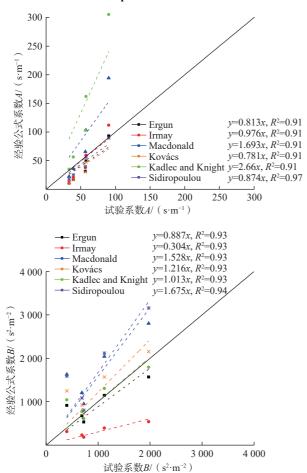


图 4 均质孔隙介质各经验公式线性回归法评价结果

Fig. 4 Evaluation on the empirical formulas of homogeneous porous media by linear regression method

归一化目标函数值均小于 1, 各经验公式对其估算结果都较为可靠, 而在对系数 B估算中除 Irmay 公式的

归一化目标函数值大于 2 外, 其他均小于 0.6, 预测值可取; 其中, 系数A与B的最小归一化目标函数值分别为 0.264与 0.287, 即适用性最好的经验公式分别是 Sidiropoulou 公式与 Kadlec and Knight公式。

对于线性回归法,斜率最接近1表明预测效果最佳,预测结果最接近系数A和B试验值的分别为Irmay公式和Kadlec and Knight公式。该方法在评估系数A的最佳公式时与归一化目标函数法略有不同,究其原因,线性回归法的参数除了斜率外,还包含了试验值与预测值的相关系数,表示过原点的直线与数据点的拟合精度,因而存在一定的拟合误差,影响最佳结果的判断。但值得指出的是,线性回归法基于散点图拟合直线,以图的方式表现预测结果更加灵活直观。

对不同经验方程下的 Forchheimer 方程系数 A和 B分开评估,各自的预测效果无法达成一致,为了整体评估各经验公式的适用性,以水力梯度作为评估标准,将各经验公式下 Forchheimer 方程系数 A、B的预测值代入方程中,分别计算出试验过程中不同渗透流速下对应的水力梯度,不同粒径下各经验公式预测水力梯度归一化目标函数值变化如图 5 所示。

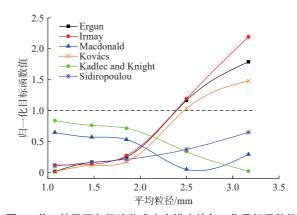


图 5 单一粒径下各经验公式水力梯度的归一化目标函数值 Fig. 5 Normalized objective function values of hydraulic gradients in the empirical formulas under single particle size

从图 5 中可以看出,当粒径为 1.075, 1.475, 1.850 mm时,所有经验公式的归一化目标函数值均小于 1,都能满足常规精度要求,但预测效果最好的为 Kovacs 公式。随着粒径增大到 2.50, 3.17 mm,水力梯度的最佳估计分别转变为 Macdonald 公式与 Kadlec and Knight公式,而归一化目标函数值大于 1 的有 Ergun、Irmay和 Kovacs 3 个公式,其预测误差也随粒径变大而递增。5 种粒径大小下,水力梯度的归一化目标函数值都低于 1 的经验公式有 Macdonald、Kadlec and Knight和 Sidiropoulou公式,且 Sidiropoulou公式的预测误差

始终维持在较低水平,但高估了较小粒径的水力梯度,低估了较大粒径的水力梯度。

将其他学者对各经验公式 Forchheimer 方程系数 的评估结果与本文进行比较, Huang 等[31]认为基于等 径球粒模型的 Irmay 公式能较好地预测有机玻璃小球 粒径为3,5,8,10 mm的立方体排列孔隙介质中的水 力梯度; Sedghi-Asl 等[32] 认为 Sidiropoulou 公式能够很 好地预测粒径为 2.83, 5.5, 8.7, 15.6, 31.1, 56.8 mm(对 应的孔隙度为 0.32, 0.33, 0.35, 0.32, 0.36, 0.40)的 6 组 圆形冲积物中的水力梯度,后者评估结果与本文一 致, 究其原因, Sidiropoulou 推导经验公式时收集数据 所对应的渗透试验孔隙介质涵盖范围宽泛,不仅包含 了常见的砂岩、角砾岩、砂砾岩、河卵石、大理石,还 囊括了玻璃球、活性炭、无烟煤、离子交换树脂等特 殊材料,这也使得该经验公式的适用范围较广。综上 所述,单一粒径等粒结构孔隙介质下,每个经验公式 都有各自的适用性,因为各个经验公式源于不同介质 和不同流速范围的渗流试验,故采用不同渗流试验条 件下的数据评估 Forchheimer 方程系数与水力梯度的 最佳经验公式也会存在差异。

#### 3.2 非均质孔隙介质不同类型方程评价

#### 3.2.1 2 种粒径混合

对于 2 种混合粒径的非等粒结构孔隙介质,以平均粒径作为特征长度,在仅考虑非均质孔隙介质平均粒径条件下,采用归一化目标函数法和线性回归法对平均粒径在 1.31~2.66 mm 的非均质孔隙介质经验公式系数适用性进行评估,见图 6。归一化目标函数法评估结果中,虽然 Macdonald 公式对系数 A、B的预测效果最佳,但所有经验公式下系数 B的归一化目标函数值最小为 1.813,均大于 1,预测误差较大。线性回归法与归一化目标函数法的评估结果较为相似,各经验公式对系数 B的预测误差较大。因此在应用各经验公式评估 Forchheimer 方程系数时,忽略非均质孔隙介质的粒径大小及质量比,仅考虑平均粒径有失偏颇,对于混合粒径构成的孔隙介质,系数 A、B的试验数据还应根据混合粒径颗粒的分选程度加以区分归类,并将混合粒径的大小与质量比纳入评估体系中。

在12组2种粒径混合的非均质孔隙介质中选取9组进行分析, 其特点是都以3.175 mm的石英砂为初始粒径, 按7:3、5:5、3:7的质量比混合1.075, 1.475, 1.850 mm不同大小粒径石英砂形成, 渗流阻力试验特征值见表2中编号H2-1到H2-12。由表2可知, 在质量比为7:3时, 随着加入3.175 mm石英砂中

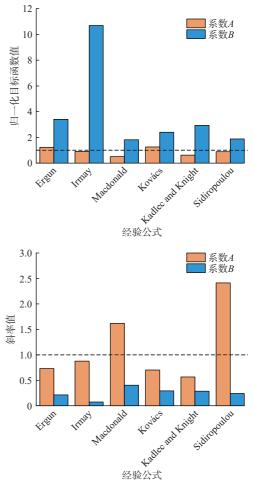


图 6 2 种混合平均粒径下系数 A、B的归一化目标函数法和线性 回归法评估结果

Fig. 6 Evaluation on the coefficients A and B under two kinds of mixed average particle size by normalized objective function method and linear regression method

的混合粒径的增大,石英砂整体的平均粒径也随之增大,Forchheimer 方程系数A、B均呈下降的变化趋势。当粒径混合质量比为5:5和3:7时也有相同的规律。该结果也从侧面解释了图6中2种粒径混合的非等粒孔隙介质A、B系数的试验值与平均粒径变化规律不明显的原因。不同质量比和不同混合粒径条件下各经验公式预测 Forchheimer 方程A、B系数的归一化目标函数值如表3所示。

从表 3 中可以看出, 在不同质量比条件下, 对于Forchheimer 方程系数 A的预测受不同质量比的变化影响较小, 且整体的归一化目标函数值均小于 2, 其中质量比为 7:3 的 Macdonald 公式的预测精度最好, 其余质量比的 Kadlec and Knight 公式预测精度最好。在系数 B的预测中, 各经验公式对于质量比 7:3 的预测归一化目标函数值整体上大于 2, 其原因为当小粒径的

	表 3 不同质量比和不同混合粒径下各经验公式预测系数 $A$ 、 $B$ 的归一化目标函数值
Table 3	NOF values in the empirical formulas for predicting coefficients $A$ and $B$ under different mass ratios and different mixed
	particle sizes

				purticie				
混合方式		系数 -	经验公式预测系数A、B的归一化目标函数值					
			Ergun	Irmay	Macdonald	Kovács	Kadlec and Knight	Sidiropoulou
不同质量比	7:3	A	0.775	0.590	0.516	0.827	0.646	1.102
		B	4.147	13.324	1.942	2.872	3.556	2.940
	5:5	A	1.138	0.878	0.752	1.207	0.613	1.348
		B	1.462	5.451	0.684	0.966	1.224	1.044
	3:7	A	1.062	0.832	0.724	1.124	0.641	1.122
		B	0.312	1.482	0.595	0.455	0.368	0.398
不同粒径/mm	1.075, 3.175	A	1.325	0.935	0.725	1.422	0.361	1.774
		B	4.556	14.923	2.025	3.101	3.883	3.227
	1.475, 3.175	A	0.308	0.427	0.492	0.279	0.809	0.209
		B	0.352	1.048	0.653	0.520	0.427	0.498
	1.850, 3.175	A	0.479	0.568	0.617	0.457	0.852	0.437
		B	0.488	0.579	0.730	0.625	0.551	0.592

质量占比较高时,再选取平均粒径作为特征长度会给各经验公式的预测造成较大误差。Kadlec and Knight公式对质量比为3:7的预测效果较好,Macdonald公式预测其余质量比的归一化目标函数系数B时精度较其他公式高。

在不同混合粒径条件下,各经验公式对 1.075 mm 与 3.175 mm 粒径混合的 Forchheimer 方程系数预测的 归一化目标函数值明显大于其他粒径混合的值,其原 因是仅选取平均粒径作为特征长度会给各经验公式的预测造成较大误差。在系数A的预测中, Kadlec and Knight 公式对于 1.075 mm 与 3.175 mm 粒径混合的预测精度最好, Sidiropoulou 公式对于其他两种粒径混合的预测精度最好。在系数 B的预测中, Macdonald 公式对于最小与最大粒径混合的预测精度最好。在对于其他两种粒径混合的预测精度最好。

由图 7可知, Kadlec and Knight 与 Macdonald 公式在非均质孔隙介质所有混合粒径与质量比的组合中预测效果最稳定,水力梯度的归一化目标函数值整体上都低于 1,在混合粒径为 1.075 mm 与 3.175 mm 的 3 组质量比中, Ergun、Irmay、Kovacs 与 Sidiropoulou 4 个公式的归一化目标函数值均大于 1。

Sidiropoulou 公式对混合粒径为1.075 mm 与1.85 mm 的水力梯度预测效果最好。当混合粒径为1.075, 3.175 mm 时,质量比从7:3到5:5再到3:7,除了Kadlec and Knight 公式所有的经验公式均低估了水力梯度,Kadlec and Knight 公式为最佳选择;而粒径大小为1.475,1.850,3.175 mm的两种组合中预测的水力梯度却始终大于试验值,Irmay 公式预测误差最小。

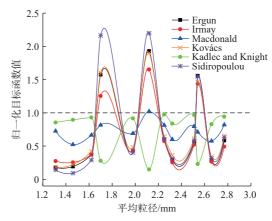


图 7 2 种混合粒径下各经验公式水力梯度的归一化目标函数值 Fig. 7 Normalized objective function value of hydraulic gradient in the each empirical formula under two kinds of mixed particle size

# 3.2.2 5 种粒径混合

对于 5 种混合粒径的非等粒结构孔隙介质,尽管可以控制试验段的孔隙度相等,但不同的粒径组成对试验段孔隙结构产生一定影响,选取不同的特征粒径会对各经验公式预测 Forchheimer 方程系数的准确性产生影响。因此本文在控制试验管段填充介质孔隙度为 0.36 的基础上,选取 5 种混合粒径的  $d_{10}$ 、 $d_{50}$ 、 $d_{60}$ 、 $d_{m-s}$  值作为特征粒径[35],采用归一化目标函数法和线性回归法对选取不同粒径特征值时各经验公式预测Forchheimer 方程系数A、B的准确性进行评估。而在考虑 4 种特征粒径条件时继续评估水力梯度会引入较多变量,因此本文未对 5 种混合粒径的水力梯度进行评估。5 种混合粒径石英砂特征值如表 2 编号 H3-1 到 H3-9 所示。

由图 8 可知, 采用归一化目标函数法对各经验公 式预测 Forchheimer 方程系数 A、B 准确性的评估中, 除 Irmay 公式在使用  $d_{50}$  和  $d_{60}$  作为特征粒径的归一化 目标函数值大于1外,其余公式预测系数A、B的归一 化目标函数值均小于1。对于5种混合粒径预测Forchheimer 方程参数的特征粒径选取时,整体上使用  $d_{60}$  作 为特征粒径预测系数A、B的精确度最高,其次为 $d_{50}$ , 而预测结果误差较大的是特征粒径为 d10 的值。具体 到渗流 Forchheimer 方程系数的预测中, 对于系数A的 预测, Kadlec and Knight 公式的预测效果最好, Ergun 和 Kovacs 公式预测的归一化目标函数值较为接近, 而 Sidiropoulou 公式对于系数 A的预测效果则相对较 差。对于系数B的预测中, Ergun 公式的预测效果最好, 其次为 Kadlec and Knight 公式。值得注意的是 Irmay 公式预测系数B时,不同的特征粒径选取对于其预测 结果的精度有较大影响, 在使用  $d_{10}$  作为特征粒径时, Irmay公式预测精度较高。

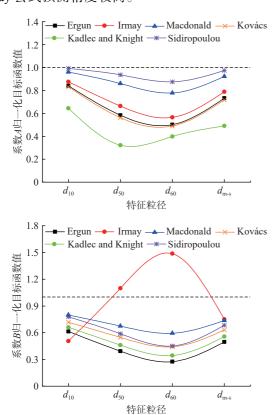


图 8 4 种特征粒径下各经验公式评价系数A、B归一化 目标函数值

Fig. 8 Evaluation on normalized objective function values of A and B coefficients by empirical formulas under four characteristic particle sizes

采用线性回归法评估各经验公式对 Forchheimer 方程系数A、B的预测结果如图 9 所示,其中斜率值越

接近 1 表明预测效果越好。从图中可以看出,线性回归法与归一化目标函数法的评价结果不同的是,评估结果中各经验公式对于系数A的预测误差明显大于系数B的预测误差,其原因是渗流 Forchheimer 方程系数B的值大于A的值,因此各经验公式对于系数A的预测误差较大。与归一化目标函数法相同的是,使用  $d_{60}$ 、 $d_{50}$  作为特征粒径预测系数A、B的精确度最高,Kadlec and Knight 公式对于系数A的预测效果最好,Ergun 公式对于系数B的预测效果最好。

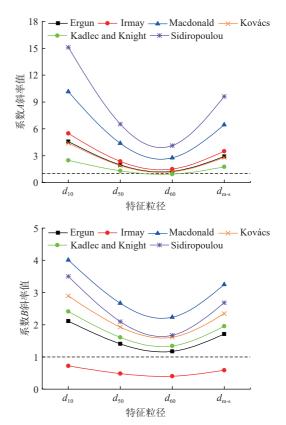


图 9 4 种特征粒径下各经验公式线性回归法评价结果
Fig. 9 Evaluation on empirical formulas by linear regression
method under four characteristic particle sizes

# 4 结论

(1)对于均质孔隙介质,两种评估方法均表明 Kadlec and Knight 公式对于系数 B有着很好的预测效果。而对于系数 A的预测,两种评估方法略有不同,但总体上 Sidiropoulou 和 Irmay 公式都有较高的预测精度。水力梯度的预测评估中, Sidiropoulou 公式有着较好的预测效果。

(2)对于2种混合粒径孔隙介质,各经验公式在使用平均粒径预测系数B时的预测误差较大,因此还综合考虑了混合粒径的质量比和粒径大小因素。结果

表明:最小粒径与最大粒径的混合会给各经验公式预测系数 B造成较大影响,其中 Macdonald 公式受影响较小。Kadlec and Knight与 Macdonald 公式对于水力梯度的预测结果较为稳定。

- (3)5 种混合粒径孔隙介质评价结果表明:使用  $d_{60}$  作为特征粒径预测系数A、B的精确度最高, Kadlec and Knight 公式对于系数A的预测效果较好, Ergun 公式对于系数B的预测效果较好,而 Irmay 公式在预测系数B时其精度受特征粒径选取的影响较大。
- (4)对野外获取的松散砂砾石孔隙介质,通过筛分法获取到介质的粒径级配数据后,可通过以下方式直接得出非达西渗流方程参数:对于均质孔隙介质,采用 Sidiropoulou 公式对水力梯度有着最佳的预测结果;对于主要含有 2 种粒径的非均质孔隙介质,采用 Kadlec and Knight 与 Macdonald 公式对水力梯度的预测结果最好;对于粒径级配复杂的非均质介质,应对系数A、B采用不同的经验公式分别预测进而达到水力梯度的最佳预测结果,在特征粒径的选择中,使用 $d_{60}$ 作为特征粒径预测A、B系数的精确度最佳,对于系数A使用 Kadlec and Knight 公式的预测结果最佳。

#### 参考文献(References):

- [1] BEAR J, BRAESTER C. On the flow of two immscible fluids in fractured porous media[C]//Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Amsterdam: Elsevier, 1972: 177-202.
- [2] 张东, 刘晓丽, 王恩志. 非均匀多孔介质等效渗透率的普适表达式 [J]. 水文地质工程地质, 2020, 47(4): 35 42. [ZHANG Dong, LIU Xiaoli, WANG Enzhi. A universal expression of the equivalent permeability of heterogeneous porous media [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2020, 47(4): 35 42. (in Chinese with English abstract)]
- [3] 丁瑜,饶云康,倪强,等.颗粒级配与孔隙比对粗粒土渗透系数的影响 [J]. 水文地质工程地质, 2019, 46(3): 108 116. [DING Yu, RAO Yunkang, NI Qiang, et al. Effects of gradation and void ratio on the coefficient of permeability of coarse-grained soil[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2019, 46(3): 108-116. (in Chinese with English abstract)]
- [4] 董晓飞, 胡成, 曹孟雄, 等. 裂隙介质渗透性的升尺度 转换研究 [J]. 地质科技通报, 2023, 42(4): 259 - 267. [DONG Xiaofei, HU Cheng, CAO Mengxiong, et al.

- Study on the upscaling transformation of hydraulic conductivity in fractured media [J]. Bulletin of Geological Science and Technology, 2023, 42(4): 259 267. (in Chinese with English abstract)
- [5] 明瑞卿,张全立,罗淮东,等.低渗透底水气藏压裂井见水时间预测模型改进研究[J].地质科技情报,2019,38(6):91 95. [MING Ruiqing, ZHANG Quanli, LUO Huaidong, et al. Optimization of water breakthrough time for fractured wells in low permeability gas reservoirs with bottom water[J]. Geological Science and Technology Information, 2019, 38(6):91 95. (in Chinese with English abstract)]
- [6] SONG Wenhui, YAO Jun, MA Jingsheng, et al. A pore structure based real gas transport model to determine gas permeability in nanoporous shale [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2018, 126: 151 160.
- [7] FORCHHEIMER P. Wasserbewegung durch boden[J]. Z Ver Deutsch Ing, 1901, 45(45): 1782 – 1788.
- [8] CIMOLIN F, DISCACCIATI M. Navier-Stokes/ Forchheimer models for filtration through porous media[J]. Applied Numerical Mathematics, 2013, 72: 205 – 224.
- [9] CHEN Zhangxin, LYONS S L, QIN Guan. Derivation of the forchheimer law via homogenization [J]. Transport in Porous Media, 2001, 44(2): 325 335.
- [10] GIORGI T. Derivation of the forchheimer law via matched asymptotic expansions [J]. Transport in Porous Media, 1997, 29(2): 191 206.
- [11] IRMAY S. On the theoretical derivation of Darcy and Forchheimer formulas[J]. Eos, Transactions American Geophysical Union, 1958, 39(4): 702 707.
- [12] DUDGEON C R. An experimental study of the flow of water through coarse granular media[J]. La Houille Blanche, 1966, 52(7): 785 801.
- [13] BORDIER C, ZIMMER D. Drainage equations and non-Darcian modelling in coarse porous media or geosynthetic materials[J]. Journal of Hydrology, 2000, 228(3/4): 174 – 187.
- [14] ZENG Zhengwen, GRIGG R. A criterion for non-darcy flow in porous media[J]. Transport in Porous Media, 2006, 63(1): 57 69.
- [15] REDDY N B, RAO P R. Effect of convergence on nonlinear flow in porous media[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 132(4): 420 427.
- [16] MATHIAS S A, TODMAN L C. Step-drawdown tests and the Forchheimer equation[J]. Water Resources Research,

- 2010, 46(7): W07514.
- [17] SKOGESTAD J O, KEILEGAVLEN E, NORDBOTTEN J M. Domain decomposition strategies for nonlinear flow problems in porous media[J]. Journal of Computational Physics, 2013, 234: 439 451.
- [18] 李仲夏. 孔隙介质渗流阻力实验及数值模拟研究 [D]. 武汉: 中国地质大学, 2020. [LI Zhongxia. The experimental and numerical simulation study of seepage resistance in porous media [D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2020. (in Chinese with English Abstract)]
- [19] ERGUN S. Fluid flow through packed columns[J]. Chem Eng Prog, 1952, 48(45): 89 94.
- [20] IRMAY S. Theoretical models of flow through porous media, RILEM Symp. Transfer of Water in porous media, Paris[J]. Bull RILEM, 1964, 29(45): 37 43.
- [21] 黄琨. 孔隙介质渗流基本方程的探索 [D]. 武汉: 中国地质大学, 2012. [HUANG Kun. Exploration of the basic seepage equation in porous media [D]. Wuhan: China University of Geosciences, 2012. (in Chinese with English abstract)]
- [22] KOVACS G. Developments in Water Science -Seepage Hydraulics [M]. Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [23] MACDONALD I F, EL-SAYED M S, MOW K, et al. Flow through porous media-the Ergun equation revisited [J]. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 1979, 18(3): 199 208.
- [24] KADLEC R H, KNIGHT R L. Treatment Wetlands[M]. Treatment Wetlands, 1996.
- [25] SIDIROPOULOU M G, MOUTSOPOULOS K N, TSIHRINTZIS V A. Determination of Forchheimer equation coefficients *a* and *b*[J]. Hydrological Processes, 2007, 21(4): 534 554.
- [26] VENKATARAMAN P, RAO P R M. Darcian, transitional, and turbulent flow through porous media[J].

  Journal of Hydraulic Engineering, 1998, 124(8): 840 –

846

- [27] 张文娟, 王媛, 倪小东. Forchheimer 型非达西渗流参数特征分析 [J]. 水电能源科学, 2014, 32(1): 52 54. [ZHANG Wenjuan, WANG Yuan, NI Xiaodong. Analysis of parameters characteristics of forchheimer's non-darcy seepage [J]. Water Resources and Power, 2014, 32(1): 52 54. (in Chinese with English abstract)]
- [28] SALAHI M B, SEDGHI-ASL M, PARVIZI M. Nonlinear flow through a packed-column experiment[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2015, 20(9); 4015003.
- [29] MOUTSOPOULOS K N, PAPASPYROS I N E, TSIHRINTZIS V A. Experimental investigation of inertial flow processes in porous media[J]. Journal of Hydrology, 2009, 374(3/4): 242 254.
- [30] WARD J C. Turbulent flow in porous media [J]. Journal of the Hydraulics Division, 1964, 90(5): 1 12.
- [31] HUANG K, WAN J W, CHEN C X, et al. Experimental investigation on water flow in cubic arrays of spheres [J]. Journal of Hydrology, 2013, 492: 61 68.
- [32] SEDGHI-ASL M, RAHIMI H, SALEHI R. Non-darcy flow of water through a packed column test[J]. Transport in Porous Media, 2014, 101(2); 215 227.
- [33] DAN Hancheng, HE Linhua, XU Bo. Experimental investigation on non-darcian flow in unbound graded aggregate material of highway pavement[J]. Transport in Porous Media, 2016, 112(1): 189 206.
- [34] SHI Wenhao, YANG Tianhong, YU Shibo. Experimental investigation on non-darcy flow behavior of granular limestone with different porosity[J]. Journal of Hydrologic Engineering, 2020, 25(8): 6020004.
- [35] VAN LOPIK J H, SNOEIJERS R, VAN DOOREN T C G
  W, et al. The effect of grain size distribution on nonlinear
  flow behavior in sandy porous media[J]. Transport in
  Porous Media, 2017, 120(1): 37 66.

编辑: 张若琳