

耦合变密度地下水流降阶模型与高斯过程的蒙特卡罗模拟

夏传安, 樊秀峰, 王浩, 简文彬

Monte Carlo simulation for variable-density groundwater flow through reduced-order model coupled with Gaussian process

XIA Chuan'an, FAN Xiufeng, WANG Hao, and JIAN Wenbin

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202406008>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于砂槽模型研究不同水流密度下盆地地下水流系统

A study of the characteristics of groundwater flow system of a basin under variable density condition based on a physical sand box model

易磊, 漆继红, 许模, 吴明亮, 李潇, 岑鑫雨 水文地质工程地质. 2019, 46(3): 40-40

高放废物深地质处置地下水流数值模拟方法研究进展

Advances in groundwater numerical simulation in deep geological disposal of high-level radioactive waste

李露露, 周志超, 邵景力, 崔亚莉, 赵敬波 水文地质工程地质. 2021, 48(6): 13-23

甘肃北山区域地下水流数值模拟研究

Numerical simulation of regional groundwater flow in the Beishan area of Gansu

曹潇元, 侯德义, 胡立堂 水文地质工程地质. 2020, 47(2): 9-16

基于高斯过程回归的地下水模型结构不确定性分析与控制

Quantification and reduction of groundwater model structural uncertainty based on Gaussian process regression

钟乐乐, 曾献奎, 吴吉春 水文地质工程地质. 2019, 46(1): 1-1

三江平原地下水流场演化趋势及影响因素

An analysis of the evolution trend and influencing factors of the groundwater flow field in the Sanjiang Plain

刘伟朋, 崔虎群, 刘伟坡, 程旭学, 李志红 水文地质工程地质. 2021, 48(1): 10-17

基于FEFLOW的三维土壤-地下水耦合铬污染数值模拟研究

Numerical simulation of three-dimensional soil-groundwater coupled chromium contamination based on FEFLOW

刘玲, 陈坚, 牛浩博, 李璐, 殷乐宜, 魏亚强 水文地质工程地质. 2022, 49(1): 164-174



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

DOI: 10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202406008

夏传安, 樊秀峰, 王浩, 等. 耦合变密度地下水流降阶模型与高斯过程的蒙特卡罗模拟 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(5): 1-13.

XIA Chuan'an, FAN Xiufeng, WANG Hao, et al. Monte Carlo simulation for variable-density groundwater flow through reduced-order model coupled with Gaussian process[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2024, 51(5): 1-13.

耦合变密度地下水流降阶模型与高斯过程的 蒙特卡罗模拟

夏传安^{1,2,3}, 樊秀峰^{1,2,3}, 王浩^{1,2,3}, 简文彬^{1,2,3}

(1. 福州大学紫金地质与矿业学院岩土与地质工程系, 福建 福州 350108; 2. 自然资源部丘陵山地地质灾害防治重点实验室, 福建 福州 350002; 3. 福建省地质灾害重点实验室, 福建 福州 350002)

摘要: 变密度地下水流系统受水力梯度和密度梯度共同驱动, 非线性强, 数值模型计算量大, 尤其在开展不确定性分析时需要的计算成本很高。常规的数据驱动机器学习方法只能对点监测信息进行模拟分析, 不能模拟整个地下水流系统。本研究发展了变密度地下水流降阶模型, 利用高斯过程模型对降阶模型的数值误差进行修正组成耦合模型。耦合模型既能克服高斯过程只能模拟有限监测点信息的缺陷, 又能提高降阶模型对监测点信息的模拟精度。考虑二维剖面变密度地下水流案例, 将渗透系数场设定为空间随机变量, 采用基于全阶模型(FSMC)、降阶模型(ROMC)和耦合模型(GP-ROMC)3种蒙特卡罗模拟方法进行不确定分析。研究结果表明: (1)ROMC能替代FSMC开展不确定性分析; (2)水头和盐度的平均相对二范误差与降阶模型维度的关系可用指数函数描述(决定性系数 $R^2 \geq 0.99$); (3)GP-ROMC对监测点信息的模拟精度比ROMC高, GP-ROMC可有效修正降阶模型误差提高蒙特卡罗模拟的精度。研究成果可为地下水建模、不确定性分析、风险评估及参数反演等工作提供重要技术支撑。

关键词: 地下水; 变密度地下水流; 降阶模型; 高斯过程; 蒙特卡罗模拟

中图分类号: P641.2

文献标志码: A

文章编号: 1000-3665(2024)05-0001-13

Monte Carlo simulation for variable-density groundwater flow through reduced-order model coupled with Gaussian process

XIA Chuan'an^{1,2,3}, FAN Xiufeng^{1,2,3}, WANG Hao^{1,2,3}, JIAN Wenbin^{1,2,3}

(1. Department of Geotechnical and Geological Engineering, Zijin School of Geology and Mining, Fuzhou University, Fuzhou, Fujian 350108, China; 2. Key Laboratory of Geohazard Prevention of Hilly Mountains, Ministry of Natural Resources, Fuzhou, Fujian 350002, China; 3. Fujian Key Laboratory of Geohazard Prevention, Fuzhou, Fujian 350002, China)

Abstract: Variable-density groundwater flow (VDGF) is jointly driven by hydraulic and density gradient, leading to strong nonlinearity, large computational burden of numerical models, and therefore huge computational cost of Monte Carlo simulation for uncertainty analysis. This study developed the reduced-order model (ROM) for VDGF

收稿日期: 2024-06-05; 修订日期: 2024-07-18

投稿网址: www.swdgcgz.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(42002247; U2005205; 41972268); 广东省基础与应用基础研究基金项目(2020A1515111054); 自然资源部丘陵山地地质灾害防治重点实验室开放基金项目(FJKLGH2024K008; FJKLGH2024K002)

第一作者: 夏传安(1991—), 男, 博士, 讲师, 硕士生导师, 主要从事水文地质工程地质数值建模研究。E-mail: xiachuanan@163.com

通讯作者: 王浩(1978—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事环境岩土工程与市政工程的教学工作。E-mail: h_wang@126.com

and built the Gaussian process (GP) for simulating the numerical error of the ROM. The coupled model can obtain solutions of head and salinity across the study domain while GP simulates observation information at limited locations. Moreover, the coupled model can provide higher solution accuracies of head and salinity at the observation locations than the ROM. A two-dimensional (cross-section) VDGF test case was considered, where hydraulic conductivity was taken as a spatially random field. MC simulations were performed using three models, including the full-system model, the ROM, and the coupled model, with corresponding MC strategies denoted as FSMC, ROMC, and GP-ROMC, respectively. The results show that ROMC can be an alternative to FSMC for conducting uncertainty quantification. The relationship between head (or salinity) and the dimension of ROM can be characterized using power functions with determinate coefficients larger than 0.99. GP-ROMC has higher solution accuracy than ROMC, which indicates that GP is capable for simulating the numerical error of ROM. The results in this study are significant for performing simulation, uncertainty quantification, risk assessment, and parameter estimate in the context of groundwater.

Keywords: groundwater; variable-density groundwater flow; reduced-order model; Gaussian process; Monte Carlo simulation

在水文地质与工程地质领域中, 参数普遍存在不确定性^[1-2]。为了开展不确定性分析^[3]、风险评估^[4-5]和参数反演^[2, 6-8]等工作, 通常需要开展蒙特卡罗模拟。当系统复杂、数值网格较细时, 蒙特卡罗模拟为了确保收敛需要的计算量很大^[9]。变密度地下水流受水力梯度和密度梯度共同驱动, 广泛出现在海水入侵预测^[10-12]、海岛水资源管理^[13-15]、盐湖地下水分析^[16]及卤水开采^[17]等问题中。该系统复杂、非线性强, 为了避免数值振荡, 通常需要采用较细的数值网格。基于传统数值模型又称全阶模型 (full system model, FSM) 开展蒙特卡罗模拟 (full system model-based Monte Carlo simulation, FSMC), 计算量非常大, 不利于应用。

有较多的研究致力于发展代理模型^[18-20], 用来替换全阶模型, 以达到节省计算量的目的。代理模型按照其原理大致可以分为 2 类: 数据驱动模型^[20]和物理机制模型^[21-24]。数据驱动模型, 利用的蒙特卡罗模拟数值解集与参数样本共同形成训练集, 对数据驱动模型进行训练^[19-20]。物理机制模型基于数学物理方程进行推导得到, 例如, 基于正交分解的降阶模型^[25-26]。数据驱动模型的训练集中, 通常只采集几个关键点位的模型输出作为训练样本, 例如只采集监测井的水头和浓度数据^[27], 这样可以减少代理模型的构建难度, 但同时也限制了代理模型的功能。这种数据驱动模型在一些情况下是合理的, 例如, 在反演问题中实际只有几口监测井能采集数据^[18]; 但在需要考虑某块区域模型输出的不确定性时, 例如, 当进行含水层海水入侵现状评估时^[28], 零星盐度数据难以用于定量含水层的整体情况。

基于正交分解的降阶模型, 其原理是将高维度的数值解投影到低维度的空间中, 并通过求解低维度系统获取高维度数值解的近似解^[29]。因为低维度系统的计算量远低于高维度, 所以可以大程度上减少计算量。降阶模型解精度受降阶空间维度和基的质量影响^[21-22]。维度越高, 解精度越高, 计算量也越大。降阶空间基的质量受所选取全阶模型的数值解的数量及质量影响。在水文地质领域中已有关于降阶模型的研究。Pasetto 等^[22]考虑非稳定承压地下水流问题, 将渗透系数在几个区块上考虑为随机均匀分布, 构建基于降阶模型的蒙特卡罗模拟, 即降阶蒙特卡罗模拟 (reduced-order model-based Monte Carlo simulation, ROMC)。Li 等^[24]构建含水层溶质迁移系统的降阶模型, 并分析了降阶模型解的误差随时间增大的现象。Li 等^[23]构建了 Henry 及 Elder 等变密度地下水流问题的降阶模型, 发现降阶模型解精度会随时间增大而减小, 但并未开展 ROMC 研究。Pasetto 等^[26]将渗透系数考虑为空间随机变量, 构建稳定承压地下水流系统的降阶模型, 并开展了 ROMC, 揭示了水头误差与降阶模型维度之间的指数关系。Xia 等^[21]基于随机地下水流统计矩方程获取降阶空间的基, 构建稳定地下水流避免了全阶模型数值解的数量和质量优化问题。降阶模型在水文地质领域, 特别在变密度地下水流问题中的研究和应用还比较少。

本文考虑沙箱尺度的注水试验数值模型, 将渗透系数考虑为空间随机场, 构建具有时变边界的变密度地下水流降阶模型。此外, 本文耦合降阶模型与高斯过程 (Gaussian processes, GP) 开展高斯过程-蒙特卡罗

耦合模拟 (Gaussian process-reduced-order model-based Monte Carlo simulation, GP-ROMC), 充分结合数据驱动与物理机制模型的优势。以 FSMC 数值解为参照, 分析了 ROMC 与 GP-ROMC 的数值精度随降阶模型维度和时间的变化规律, 论证了变密度地下水流问题中使用 ROMC 的 GP-ROMC 可行性与合理性。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + \eta c) K_f \frac{\partial h_f}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(1 + \eta c) K_f \left(\frac{\partial h_f}{\partial z} + \eta c \right) \right] = \rho_f S_s \frac{\partial h_f}{\partial t} + \theta \eta \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\rho_s}{\rho_f} q_s \\ \eta = \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial \rho}{\partial c} \end{cases} \quad (1)$$

与其耦合的盐运移控制方程为^[31]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K_f}{\theta} \frac{\partial h_f}{\partial x} c \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{K_f}{\theta} \left(\frac{\partial h_f}{\partial z} + \eta c \right) c \right] = \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{q_s}{\theta} c_s \end{aligned} \quad (2)$$

式中: x, z ——位置坐标/m;

t ——时间/d;

θ ——有效孔隙度;

h_f ——水头/m;

K_f ——渗透系数/(m·d⁻¹);

ρ_f ——淡水密度/(kg·m⁻³);

ρ ——地下水密度/(kg·m⁻³);

c ——盐度/(g·L⁻¹);

η ——地下水的相对淡水密度随盐度的变化率/(m³·kg⁻¹);

D_x, D_z —— x, z 方向上的弥散系数/(kg²·d⁻¹);

q_s ——源汇项/d⁻¹, 对应的密度为 ρ_s ;

S_s ——储水系数/m⁻¹。

使用数值方法求解式(1)和式(2)获得 h_f 和 c 的数值解时, 因为离散后的系统维度等于数值网格节点数 N_n , 所以记作全阶模型。

1.2 基于全阶模型的蒙特卡罗模拟

将渗透系数考虑为空间随机变量, 样本量为 N , 总模拟时间为 T_s 。基于 FSM 的蒙特卡罗模拟时需要反复运算 N 次 FSM, 在时间步长 $[t, t+\Delta t]$ 内考虑第 i 个样本求解耦合系统可表述为:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^i \mathbf{h}_f^i = \mathbf{F}_1^i \\ \mathbf{B}^i \mathbf{c}^i = \mathbf{F}_2^i \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ——水流、盐度系统的总纲矩阵;

i ——上标指示第 i 个样本的变量;

h_f ——水头的数值解;

c ——盐度的数值解;

$\mathbf{F}_1$ ——水流离散系统的右向量;

1 理论与方法

1.1 变密度地下水流控制方程

在变密度地下水流中, 水流受水力梯度与密度共同驱动, 考虑二维剖面孔隙承压含水层变密度地下水流控制方程为^[30]:

$\mathbf{F}_2$ ——盐度离散系统的右向量。

因为 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 分别是关于 c 和 h_f 的函数, 所以对式(3)迭代耦合求解, 导致 FSMC 的计算量很大。此外, 在时变边界中, $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 包含的定解条件会随时间变化。

1.3 基于降阶模型的蒙特卡罗模拟

定义 h_f 和 c 降阶空间的基分别为: $\mathbf{P}^h = \{\mathbf{p}_1^h, \mathbf{p}_2^h, \dots, \mathbf{p}_m^h\}$ 和 $\mathbf{P}^c = \{\mathbf{p}_1^c, \mathbf{p}_2^c, \dots, \mathbf{p}_m^c\}$ 。参考文献[23]可将 h_f 和 c 的数值解投影到相应的降阶空间中, 数值解可近似表达为:

$$\begin{cases} h_f \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{p}_i^h = \mathbf{P}^h \alpha \\ c \approx \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{p}_i^c = \mathbf{P}^c \beta \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^T$ —— h_f 的降阶空间坐标系数;

$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$ —— c 的降阶空间坐标系数;

m ——降阶模型的维度。

依据 Karhunen–Loève 理论, h_f 和 c 均可以表示为均值与扰动的和, 对应的表达式为:

$$\begin{cases} h_f = \langle h_f \rangle + \tilde{h}_f \approx \langle h_f \rangle + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{p}_i^h \approx \langle h_f \rangle + \mathbf{P}^h \alpha \\ c = \langle c \rangle + \tilde{c} \approx \langle c \rangle + \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{p}_i^c \approx \langle c \rangle + \mathbf{P}^c \beta \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\langle h_f \rangle$ ——水头的均值;

$\langle c \rangle$ ——盐度的均值;

$\tilde{h}_f$ ——水头的扰动;

$\tilde{c}$ ——盐度的扰动。

式(4)、式(5)显然存在矛盾, 前者只有在 $\langle h_f \rangle$ 与 $\langle c \rangle$ 等于 0 时才成立。虽然使用式(4)会引入额外的计算误差, 但可简化降阶模型, 在一定程度上减少计算量。将式(4)带入式(3)中, 则 $[t, t+\Delta t]$ 第 i 个样本求解的 m 维耦合系统可表述为:

$$\begin{cases} (\mathbf{P}^h)^T \mathbf{A}^i (\mathbf{P}^h) \boldsymbol{\alpha}^i \approx (\mathbf{P}^h)^T \mathbf{F}_1^i \\ (\mathbf{P}^c)^T \mathbf{B}^i (\mathbf{P}^c) \boldsymbol{\beta}^i \approx (\mathbf{P}^c)^T \mathbf{F}_2^i \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\mathbf{P}^h = \{\mathbf{p}_1^h, \mathbf{p}_2^h, \dots, \mathbf{p}_m^h\}$ —— U_h 的前 m 列;

$\mathbf{P}^c = \{\mathbf{p}_1^c, \mathbf{p}_2^c, \dots, \mathbf{p}_m^c\}$ —— U_c 的前 m 列。

求解式(6)获得 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 后带入式(4)可获得 h_f 和 c 的近似解。近似解的精度随着 m 增大而提高,当 m 接近 N_n 时, h_f 和 c 的近似解逼近式(3)的数值解。当 $m \ll N_n$,求解 m 维系统的式(6)的计算量远小于 N_n 维系统的式(3),可以达到节省计算量的目的。依托式(6)、式(4)求解 h_f 和 c 的模型,模型维度为 m ,记作降阶模型 ROM。依托 ROM 开展的蒙特卡罗模拟,记作 ROMC。

降阶空间的基通过一定数量的 FSM 获得 h_f 和 c 解集合的奇异值分解获得:

$$\begin{cases} U_h \Lambda_h V_h^T = \text{svd}(E_h) \\ U_c \Lambda_c V_c^T = \text{svd}(E_c) \end{cases} \quad (7)$$

式中: $E_h = [h_f^1, h_f^2, \dots, h_f^{N_s}]$ —— h_f 解集合,其中 $h_f^i (i=1, 2, \dots, N_s)$ 为某一时刻的 FSM 水头数值解;

$E_c = [c^1, c^2, \dots, c^{N_s}]$ —— c 解集合;

c^i ——某一时刻的 FSM 盐度数值解, $i=1, 2, \dots, N_s$;

U_h —— $E_h E_h^T$ 的特征向量矩阵;

U_c —— $E_c E_c^T$ 的特征向量矩阵;

Λ_h ——对角阵,主对角线为 U_h 特征向量的特征值,特征值按递减顺序排列;

Λ_c ——对角阵,主对角线为 U_c 特征向量的特征值,特征值按递减顺序排列;

V_h ——矩阵 $E_h^T E_h$ 的特征向量矩阵;

V_c ——矩阵 $E_c^T E_c$ 的特征向量矩阵。

1.4 高斯过程

高斯过程作为一种黑箱模型,不需要考虑变密度地下水流的驱动机制,用于构建渗透系数与 ROM

误差的关系。与式(7)相似,取 N_s^Y 个对数渗透系数($Y = \ln K_f$)的样本,使用奇异值分解得到的降阶空间的基($\mathbf{p}_i^Y$)。 Y 可以表示为其均值 $\langle Y \rangle$ 与扰动 $\tilde{Y}$ 的和,即 $Y = \langle Y \rangle + \tilde{Y}$ 。将 $\tilde{Y}$ 投影到降阶空间中获得对应的降阶空间系数(γ_i),基于 γ_i 与 $\mathbf{p}_i^Y$ 近似 Y 的表达式为:

$$Y = \langle Y \rangle + \tilde{Y} \approx \langle Y \rangle + \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{p}_i^Y \approx \langle Y \rangle + \mathbf{P}^Y \boldsymbol{\gamma} \quad (8)$$

在不同 Y 对应的 $\langle Y \rangle$ 与 $\mathbf{P}^Y$ 相同, $\boldsymbol{\gamma}$ 与 Y 有唯一对应关系。通过构建 $\boldsymbol{\gamma}$ 与 ROM 误差的关系模型,可极大地减少高斯过程模型的训练成本。

高斯过程模型的均值与协方差函数对模型预测能力有重要影响,本文采用的均值与协方差函数为:

$$\xi(\boldsymbol{\gamma}) = \delta + \sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_i \quad (9)$$

$$k(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}') = \sigma_c^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\gamma_i - \gamma'_i}{\lambda_i^c}\right)^2\right) \quad (10)$$

其中, δ 、 ω_i 、 σ_c^2 、 λ_i^c 为高斯过程模型的超参。

1.5 基于耦合模型的蒙特卡罗模拟

与全阶模型相比,本文变密度地下水流降阶模型的主要数值误差源于对 h_f 和 c 的近似,参见式(4)。使用变密度地下水流降阶模型能够在模型定义域内求得 h_f 和 c 的近似解,但会引入额外的数值误差。为了弥补降阶模型在该方面的不足,本文利用高斯过程构建降阶模型误差关于 γ_i 的模型得到的降阶模型误差用于修正降阶模型的模拟结果,以此形成耦合模型,在关键点位(例如监测井)位置可提高模拟精度。图1为耦合变密度地下水流降阶模型与高斯过程的蒙特卡罗模拟(GP-ROMC)方法的构建框架。

2 数值算例

考虑二维剖面含水层,含水层大小为 $4.0 \text{ m} \times 2.0 \text{ m}$

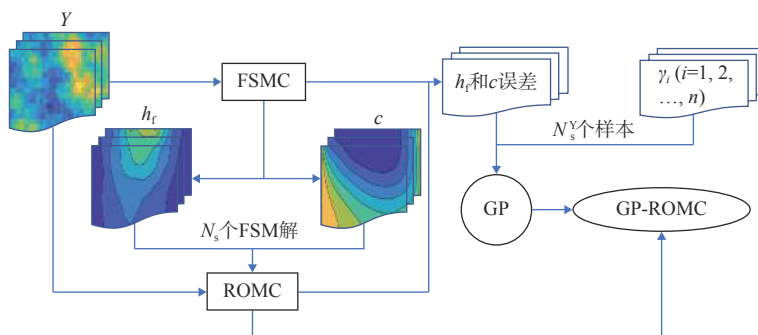


图1 GP-ROMC 的构建示意图

Fig. 1 Sketch for constructing GP-ROMC

(图 2)。含水层左右边界为海岸边界, 顶底边界为隔水边界, 分别在位置 (1.5 m, 2.0 m)、(2.0 m, 2.0 m) 和 (2.5 m, 2.0 m) 处淡水注水井, 注水率是关于时间的函数: $[57.02 + \sin(\pi t/100)] \text{ m}^3/\text{d}$ 。垂向注水井的过滤器布设于地表以下 0~5 cm, 过滤器引起的水头损失被忽略。淡水与海水密度分别 $1\,000, 1\,025 \text{ kg/m}^3$, 海水的盐度为 35 g/L 。全阶模型采用标准有限元法离散控制

方程式(1)(2), 数值网格的大小为 41×21 , 共 861 个节点、1 600 个单元, 每个三角单元大小相同。时间采用隐式差分, 时间步长恒定为 20 min, 共模拟 10 个时间步长, $T_s = 200 \text{ min}$ 。如图 2(a)所示, 含水层设置 3 个观测位置 I(2.5, 1.5), II(2.0, 1.0) 和 III(1.5, 0.5), 用于观测水头和盐度的变化及构建 GP-ROMC 模型。

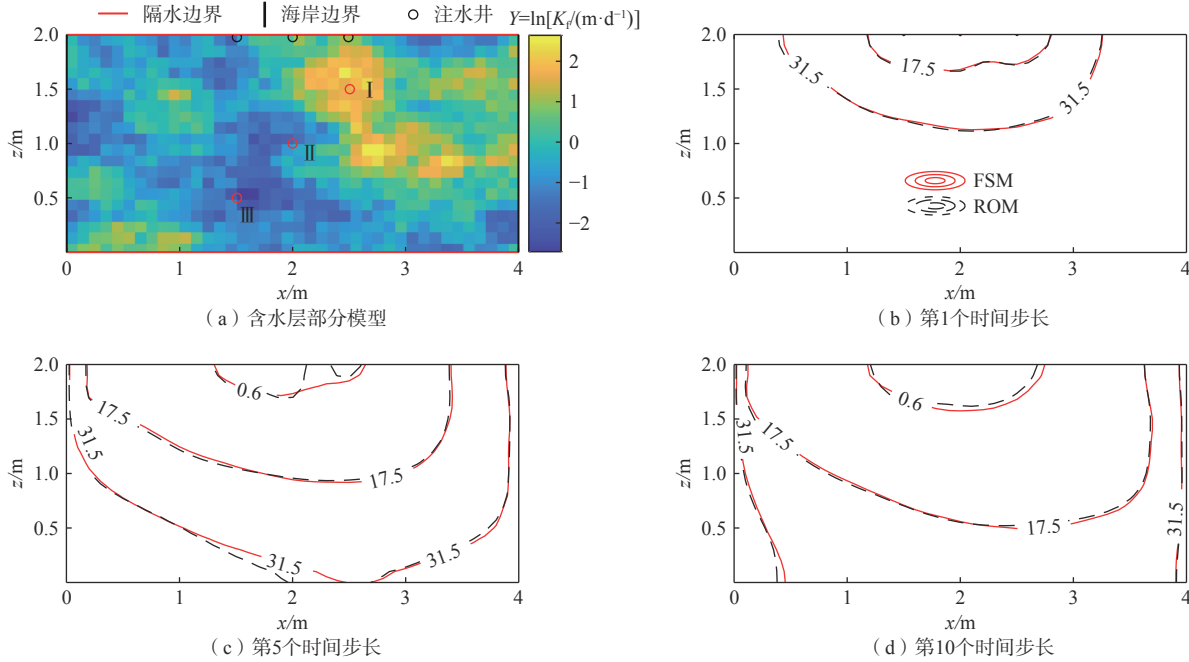


图 2 二维剖面含水层及 FSM 与 ROM ($m=30, N_Y=500$) 的盐度模拟结果

Fig. 2 Two-dimensional (cross-section) aquifer considered together with corresponding salinity contours obtained through FSM and ROM with $m=30$ and $N_Y=500$

将 Y 考虑为服从高斯分布的空间随机场, 其变异性用指数协方差函数刻画:

$$C = \sigma_Y^2 \exp\left(-\left(\frac{d_x}{\lambda_x} + \frac{d_z}{\lambda_z}\right)\right) \quad (11)$$

式中: σ_Y^2 —— Y 的方差;

d_x, d_z ——两点之间在 x, z 方向的距离;

λ_x, λ_z —— x, z 方向的相关长度。

考虑图 2(a)中的 Y 场, 在第 1, 5, 10 个步长, 由 FSM 及 ROM 获得的盐度等值线, 见图 2(b)~(d)。

设定 Y 的样本量 (N) 等于 100 000, 采集 $N_Y=500$ 个 Y 样本量用于获取 FSM 的解。在每个时间步长都采集 N_Y 个水头和盐度的数值解构建 E_h 和 E_c , 即 $N_s = 10N_Y$ 。降阶模型的维度 m 取值范围为 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40。

以 FSMC 数值解作为参照, 时间步长 $[t, t+\Delta t]$ 内 ROMC 获得的水头和盐度的平均相对二范误差的表达式分别为:

$$\mu_h = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\|h_f^{i, \text{ROM}} - h_f^{i, \text{FSM}}\|_{L_2}^2}{\|h_f^{i, \text{FSM}}\|_{L_2}^2} \quad (12)$$

$$\mu_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\|c^{i, \text{ROM}} - c^{i, \text{FSM}}\|_{L_2}^2}{\|c^{i, \text{FSM}}\|_{L_2}^2} \quad (13)$$

式中: $h_f^{i, \text{ROM}}$ ——ROMC 中第 i 个样本的水头模拟结果;

$h_f^{i, \text{FSM}}$ ——FSMC 中第 i 个样本的水头模拟结果;

$c^{i, \text{ROM}}$ ——ROMC 中第 i 个样本的盐度模拟结果;

$c^{i, \text{FSM}}$ ——FSMC 中第 i 个样本的盐度模拟结果。

3 结果

N_Y 等于 100, 500, 1 000 时 (即 N_s 等于 1 000, 5 000, 10 000 时) h_t 的前 3 个基: p_1^h, p_2^h 和 p_3^h , 见图 3。从图中可见, N_Y 等于 500 和 1 000 对应的 p_1^h, p_2^h 和 p_3^h 比较接近。与图 3 相对应, 图 4 所示为 c 的前 3 个基: p_1^c, p_2^c 和 p_3^c 。从图中可见, N_Y 等于 100, 500 和 1 000 对应

的 p_1^c 和 p_2^c 在视觉上差别不大, N_Y 等于 500 和 1 000 对应的 p_3^c 结果比较接近。Xia 等^[21] 研究表明 N_Y 越大, 即用于构建降阶模型的 FSM 解数量越多, 降阶模型解的

精度越高, 但 ROMC 的计算效率也越低。基于此, 同时考虑图 3 和图 4 的结果, 本文选取 $N_Y=500$ 构建变密度地下水流降阶模型。

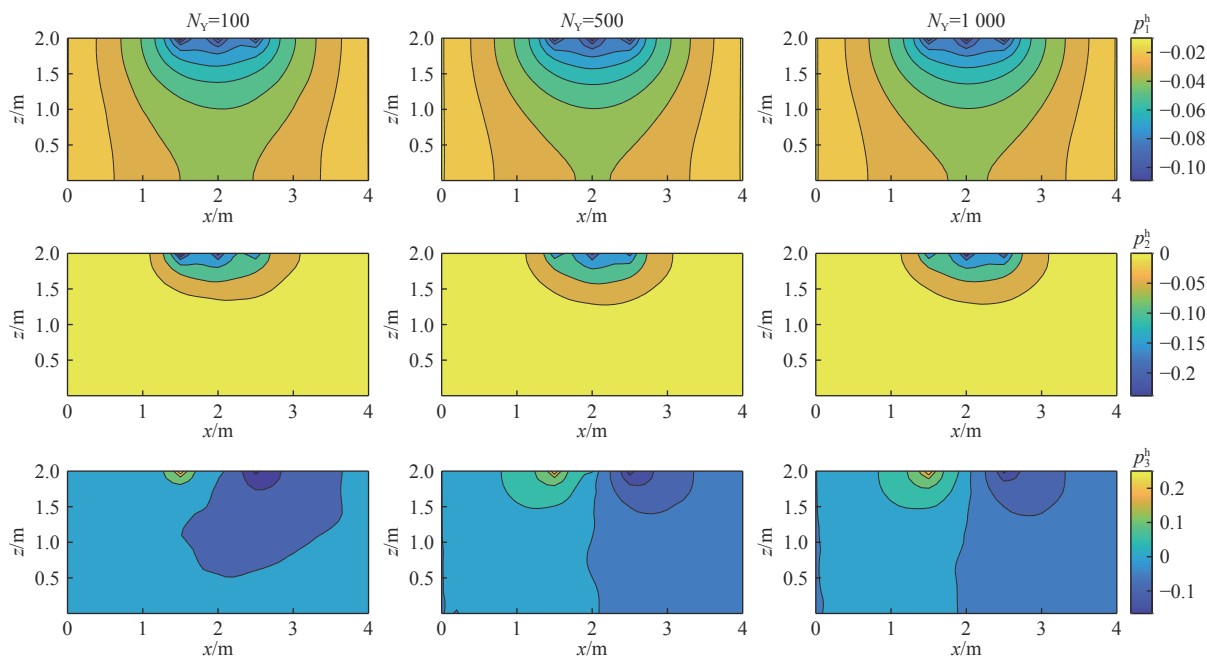


图 3 h_t 特征向量 p_1^h 、 p_2^h 和 p_3^h

Fig. 3 First three leading eigenvectors for h_t with $N_Y = 100, 500$, and $1\ 000$

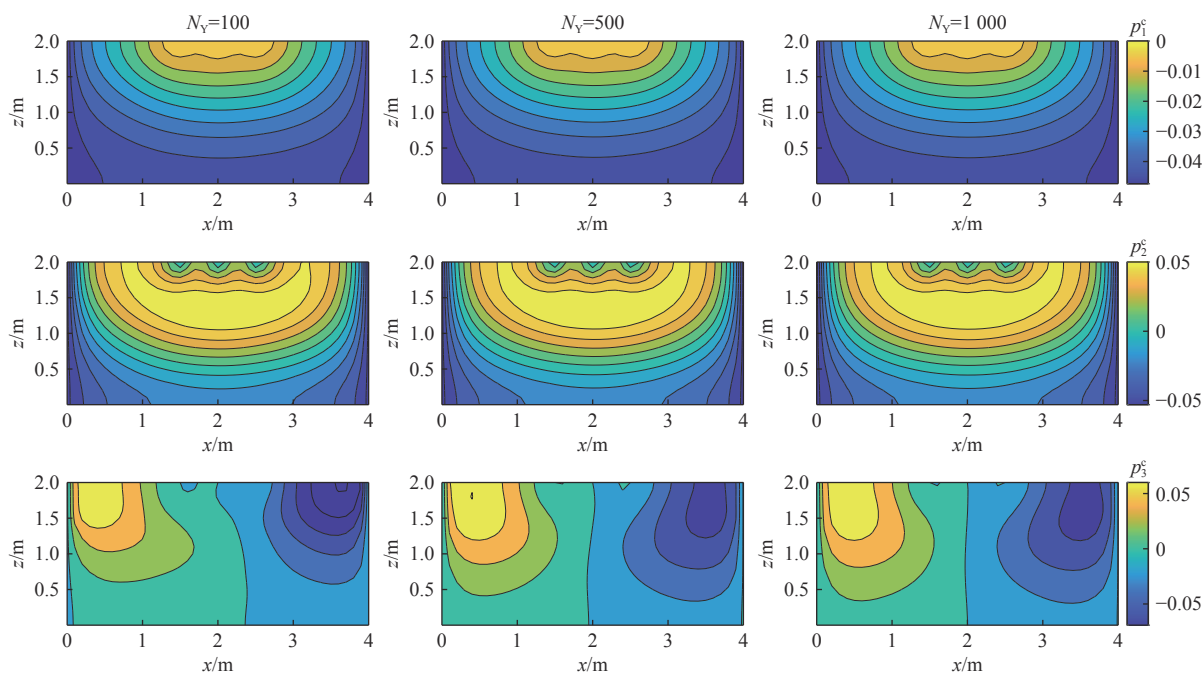


图 4 c 特征向量 p_1^c 、 p_2^c 和 p_3^c

Fig. 4 First three leading eigenvectors for c with $N_Y = 100, 500$, and $1\ 000$

以 FSMC 的解为参照, 图 5 所示为最后时刻 ($t=200\text{ min}$) ROMC 获得 h_t 均值 (η_h)、方差 (σ_h^2)、峰度 (κ_h) 及偏度 (ζ_h) 的绝对误差。 η_h 和 σ_h^2 的绝对误差在 3 口注

水井附近比较大, 围绕着 3 口井呈扇形向外辐射。 κ_h 和 ζ_h 的绝对误差在第一类水头边界附近比较大, 向含水层内部扩展逐渐缩小。 η_h 、 σ_h^2 、 κ_h 和 ζ_h 在整个含水

层的平均绝对误差分别为 0.35, 1.21, 0.76, 0.13, 平均相对误差分别为 5.27%、21.51%、7.76%、7.72%。相似地, 图 6 所示为最后时刻 ROMC 获得 c 均值(η_c)、方差(σ_c^2)、峰度(κ_c)及偏度(ζ_c)的绝对误差。与 h_f 的结果不同, η_c 的绝对误差在注水井以下含水层中部比较

大, 而 σ_c^2 、 κ_c 及 ζ_c 的绝对误差主要分布在靠边界的位置。 η_c 、 σ_c^2 、 κ_c 和 ζ_c 在整个含水层的平均绝对误差分别为 0.09, 0.21, 2.60, 0.15, 平均相对误差分别为 1.32%、9.96%、28.85%、4.39%。 h_f 前 m 个基代表的降阶空间与 c 不同, ROMC 的获得 h_f 和 c 误差也不相同。

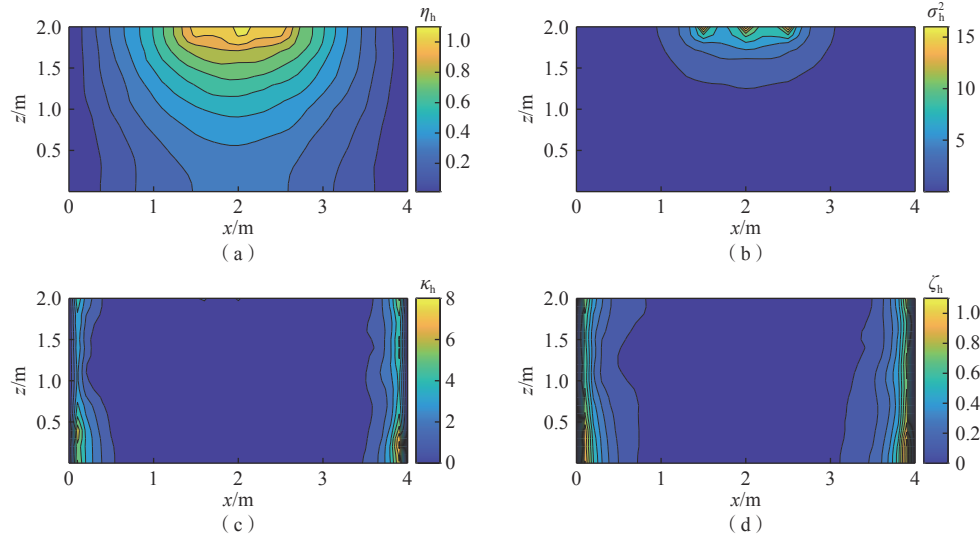


图 5 最后时刻 ROMC 获得的 η_h 、 σ_h^2 、 κ_h 及 ζ_h 的绝对误差分布图

Fig. 5 Absolute errors of η_h , σ_h^2 , κ_h , and ζ_h obtained through ROMC at $t=200$ min

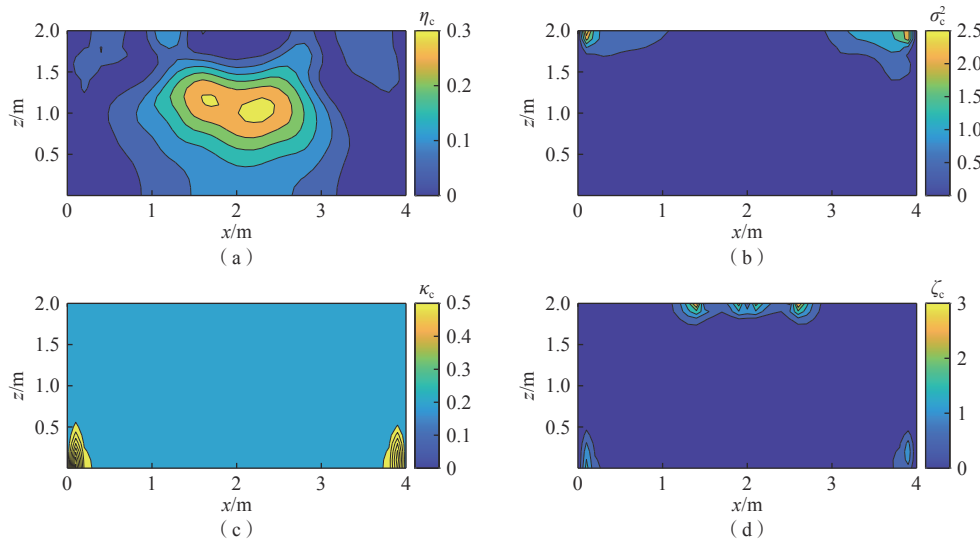
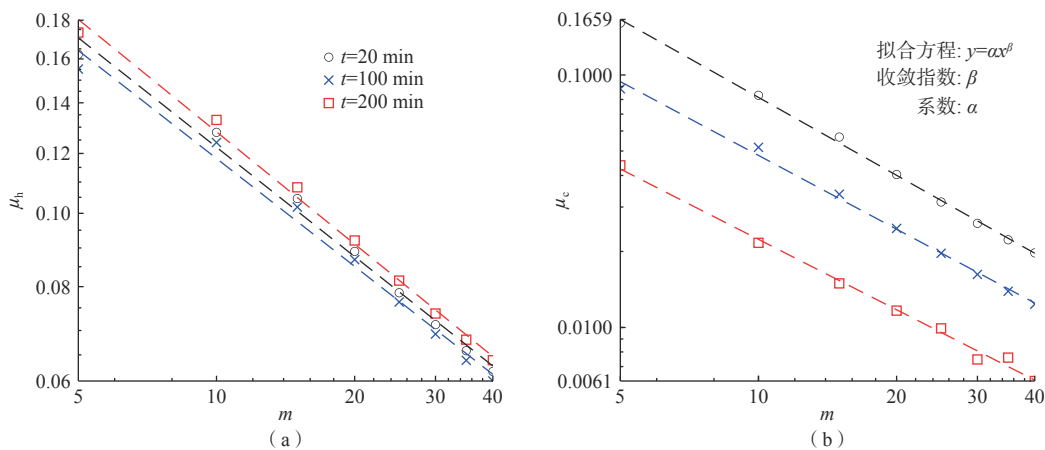


图 6 最后时刻 ROMC 获得的 η_c 、 σ_c^2 、 κ_c 及 ζ_c 的绝对误差分布图

Fig. 6 Absolute errors of η_c , σ_c^2 , κ_c , and ζ_c obtained through ROMC at $t=200$ min

为了进一步分析 ROMC 获得 h_f 和 c 误差的规律性, 本文计算了不同时刻、不同降阶模型维度下 h_f 和 c 的平均相对二范误差式(12)(13), 结果见图 7。指数函数的值与 μ_h 、 μ_c 的值吻合良好, 且 μ_h (或 μ_c) 不同时刻具有相近的收敛指数。不同时刻指数函数的回归结果见表 1。从表中可见: (1) h_f 和 c 的 R^2 大多高于 0.99;

(2) h_f 不同时刻的 β 值相近, 变化范围为 $[-0.50, -0.47]$, 平均值约为 -0.48 ; (3) c 不同时刻的 β 值相近, 变化范围为 $[-1.03, -0.93]$, 平均值约为 -0.98 ; (4) h_f 不同时刻的 α 值相近, 变化范围为 $[-1.08, -0.89]$, 平均值约为 -0.99 ; (5) c 不同时刻的 α 值差别较大, 且随时间逐渐增大, 变化范围为 $[-1.67, -0.15]$, 平均值约为 -0.80 。

图 7 $t=20, 100, 200$ min 时 μ_h 与 μ_c 随 m 的变化曲线及其指数函数的回归结果Fig. 7 μ_h and μ_c obtained at $t=20, 100$, and 200 min versus m together with the regression results of power function表 1 不同时刻 μ_h 与 μ_c 关于 m 的指数函数回归结果Table 1 Regression results of power functions for characterizing the relationship between m and μ_h (or μ_c) obtained at each time step

t/min	$y = ax^\beta$					
	h_i			c		
	α	β	R^2	α	β	R^2
20	-0.92(-1.03, -0.81)	-0.49(-0.53, -0.46)	0.995	-1.67(-1.88, -1.46)	-0.93(-1.00, -0.86)	0.994
40	-0.89(-0.99, -0.80)	-0.50(-0.53, -0.47)	0.996	-1.35(-1.63, -1.08)	-0.96(-1.05, -0.87)	0.991
60	-0.90(-1.00, 0.81)	-0.50(-0.53, -0.47)	0.996	-1.06(-1.19, -0.93)	-0.98(-1.02, -0.94)	0.998
80	-0.94(-1.04, -0.83)	-0.49(-0.53, -0.46)	0.994	-0.92(-1.05, -0.79)	-0.97(-1.01, -0.93)	0.998
100	-0.99(-1.12, -0.86)	-0.48(-0.53, -0.44)	0.992	-0.80(-0.98, -0.62)	-0.97(1.03, -0.91)	0.996
120	-1.04(-1.20, -0.89)	-0.47(-0.53, -0.42)	0.989	-0.68(-0.88, -0.50)	-0.98(-1.05, 0.92)	0.996
140	-1.08(-1.25, -0.91)	-0.47(-0.52, -0.41)	0.986	-0.59(-0.76, -0.41)	-0.99(-1.05, -0.94)	0.997
160	-1.08(-1.25, -0.91)	-0.47(-0.52, -0.41)	0.986	-0.47(-0.62, -0.32)	-1.01(-1.05, -0.95)	0.998
180	-1.05(-1.20, -0.89)	-0.47(-0.52, -0.42)	0.998	-0.33(-0.46, -0.20)	-1.01(-1.06, 0.97)	0.998
200	-1.00(-1.13, -0.86)	-0.48(-0.53, -0.44)	0.991	-0.15(-0.26, -0.03)	-1.03(-1.07, -0.99)	0.999

注: 系数 α 和收敛指数 β 对应的单元数值为: 回归值(95%置信区间下边界, 95%置信区间上边界)。

结果揭示了 μ_h 和 μ_c 与 m 呈现良好的指数关系。 μ_c 的收敛指数的绝对值 $|\beta|$ 更大, 说明 ROMC 获得 c 解精度对 m 更敏感, 且收敛速率更快。

图 8 所示为 FSMC、ROMC 与 GP-ROMC 在观测点 I 的 η_h 、 σ_h^2 、 κ_h 、 ζ_h 、 η_c 、 σ_c^2 、 κ_c 和 ζ_c 随 N 的变化曲线。从图中可见: η_h 、 σ_h^2 、 κ_h 及 ζ_h 在 $N=50\,000$ 时接近稳定; η_c 和 σ_c^2 在 $N=50\,000$ 时接近稳定, κ_c 和 ζ_c 虽然变化幅度总体不大, 但确实呈现较大的相对波动; FSMC、ROMC 与 GP-ROMC 获得的统计矩随 N 增大的变化趋势一致; 总体上, GP-ROMC 获得的统计矩比 ROMC 更接近 FSMC。Xia 等^[21] 研究表明在定密度地下水流算例中, 样本量为 $N=20\,000$ 时蒙特卡罗模拟的结果总体上稳定, 变密度地下水流系统受水力梯度与密度梯度共同驱动, 非线性很强, 开展蒙特卡罗模拟时需要较大的样本。耦合 GP 与变密度地下水流降阶模型, 可以对降阶模型的数值误差进行弥补修正, 提高模拟

精度。

由 FSMC、ROMC 与 GP-ROMC 方法在观测点 I、II 和 III 获得 h_i 的概率密度函数 (PDF) 及 ROMC 和 GP-ROMC 获得的概率密度函数分别与 FSMC 的绝对误差 (Δ), 见图 9。GP-ROMC 获得的概率密度函数要比 ROMC 更接近 FSMC, 即 GP-ROMC 的解精度要总体高于 ROMC。相似地, c 的概率密度函数计算结果见图 10, 结果表明 GP-ROMC 的解精度要总体高于 ROMC 的解精度。

为了进一步展示 GP-ROMC 在时间上的计算精度, 由 FSMC 与 GP-ROMC 获得的观测点 I、II 和 III 的 h_i 和 c 的均值及 95% 置信区间 (近似为 $\eta \pm 2\sigma$) 随时间的变化情况见图 11。GP-ROMC 的结果与 FSMC 吻合良好, 说明 GP-ROMC 的计算精度在时间上稳定可靠。观测点 I 距离动态注水井更近, h_i 和 c 对应的均值变化范围也更大, 受动态注水影响, h_i 的不确定性比观测

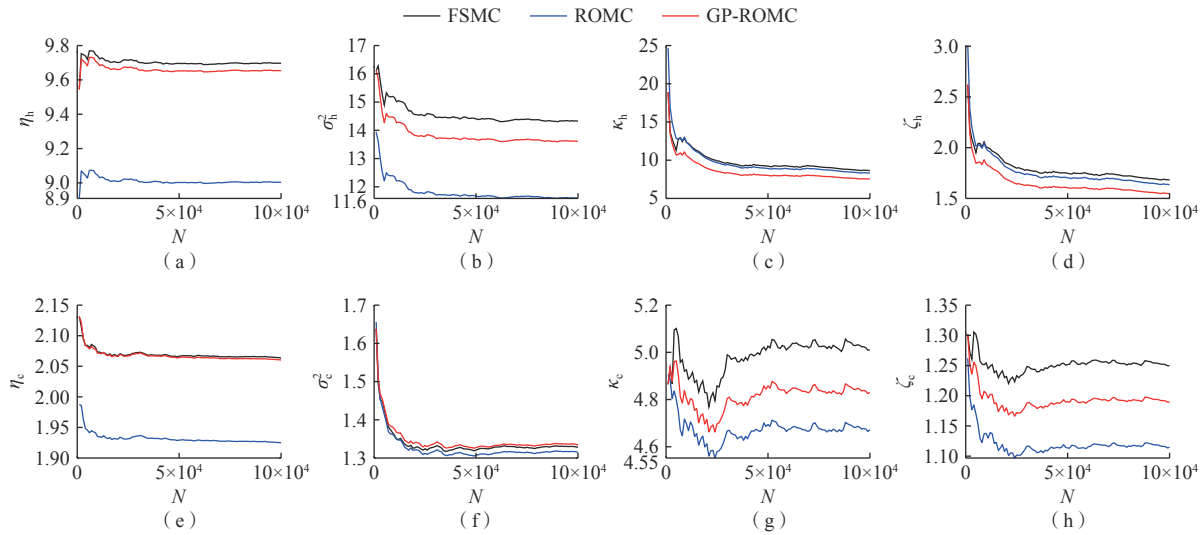


图 8 FSMC、ROMC 与 GP-ROMC 在观测点 I 的 h_f 和 c 的统计矩随 N 的变化曲线

Fig. 8 η_h , σ_h^2 , κ_h , ζ_h , η_c , σ_c^2 , κ_c and ζ_c at point I obtained through FSMC, ROMC, and GP-ROMC, with N increasing from 100 to 100 000

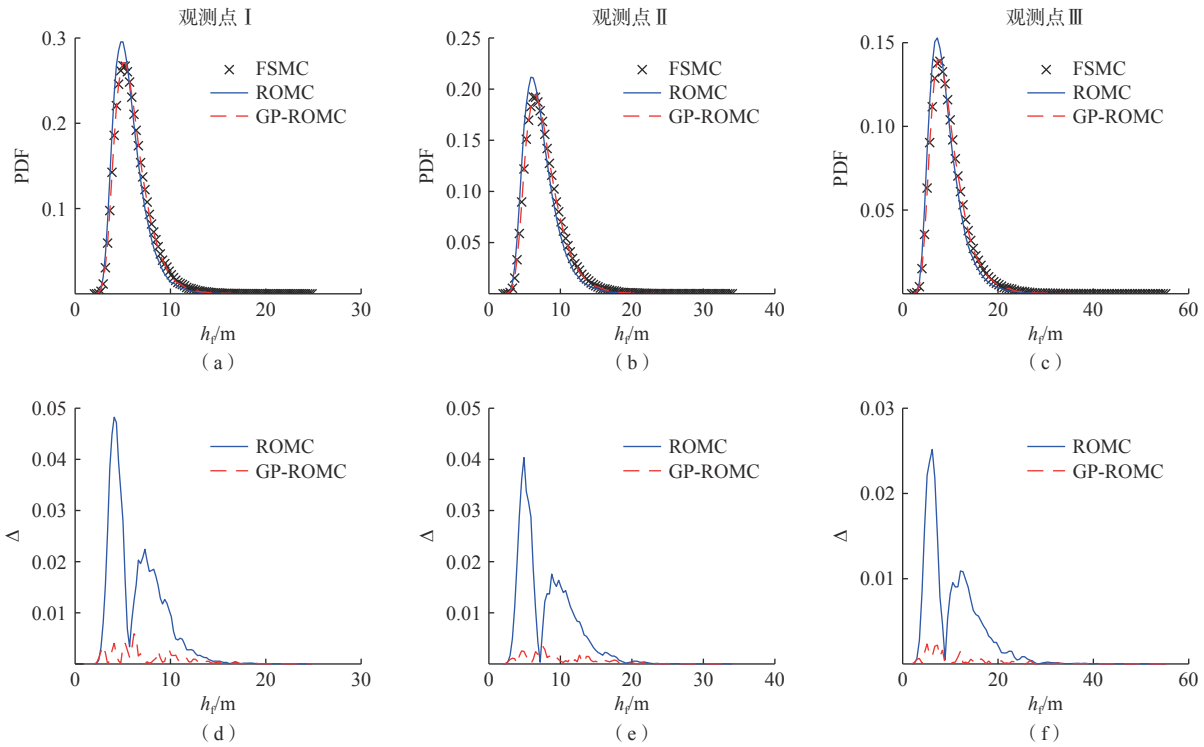


图 9 在观测点 I、II 和 III, FSMC, ROMC 和 GP-ROMC 获得的 h_f 概率密度函数

Fig. 9 PDFs of h_f obtained through FSMC, ROMC, and GP-ROMC at points I, II, and III

点 II 和 III 大, 而盐度的不确定性小。

以 FSMC 的解为参考, GP-ROMC 与 ROMC 在观测点 I、II 和 III 处获得水头和盐度的平均绝对误差随 m 变化曲线, GP-ROMC 平均绝对误差相对于 ROMC 的减少百分比, 见图 12。随着 m 增大, GP-ROMC 与 ROMC 获得的平均绝对误差单调减少, 且 GP-ROMC

获得的误差总是小于 ROMC。GP-ROMC 对水头的精度提升百分比要高于盐度, 且盐度的精度提升随 m 增大有减小的趋势, 而水头没有明显趋势。

4 讨论

变密度地下水流降阶模型基于数学物理方程构

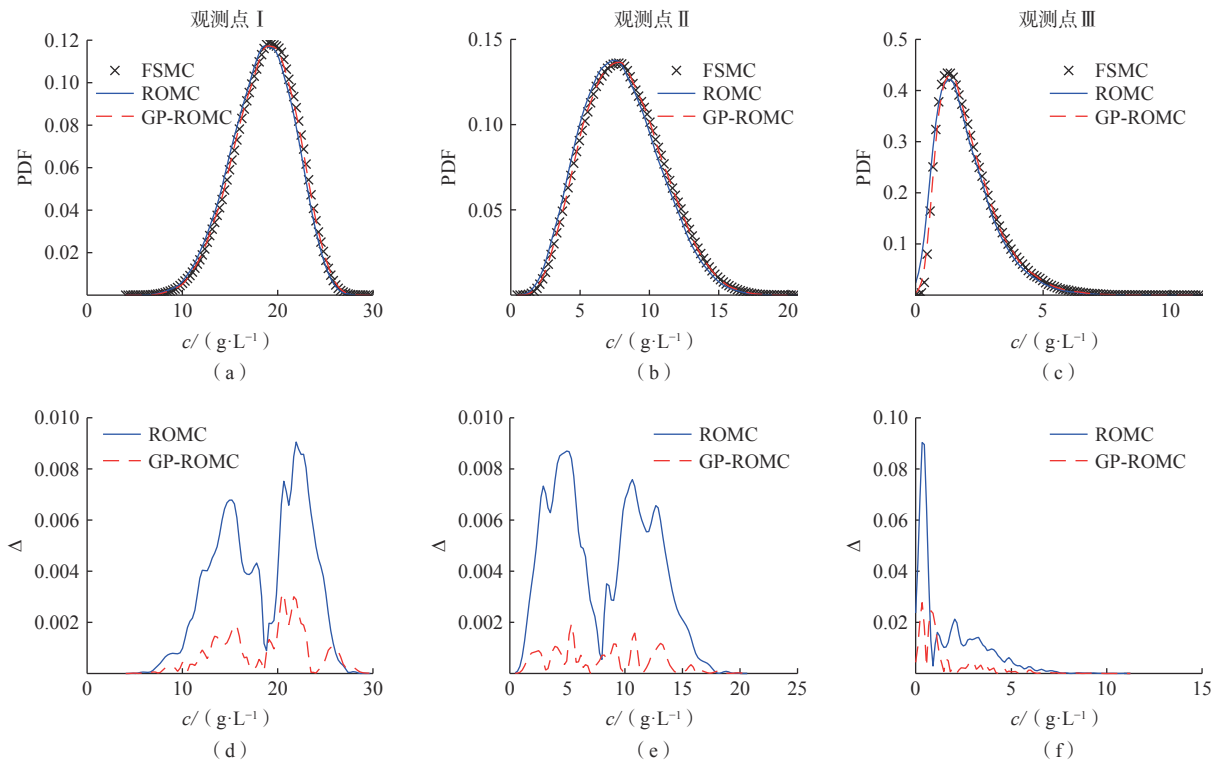


图 10 在观测点 I、II 和 III，FSMC、ROMC 和 GP-ROMC 获得的 c 概率密度函数

Fig. 10 PDFs of c obtained through FSMC, ROMC, and GP-ROMC at points I, II, and III

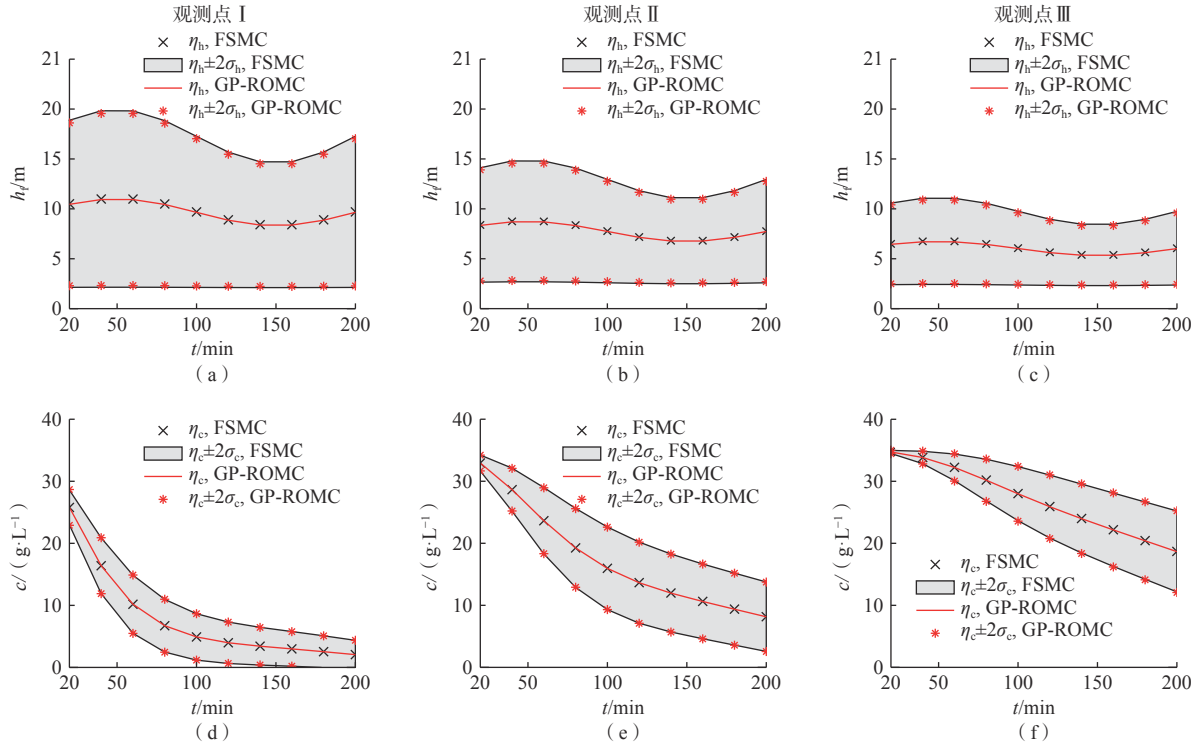


图 11 不同时刻观测点 I、II 和 III 水头与盐度的均值及对应的 95% 置信区间

Fig. 11 Temporal mean and its corresponding 95% confidence interval of h_f and c at points I, II, and III obtained through FSMC and GP-ROMC

建,在研究区定义域范围内都可得到全阶模型的近似解,但降阶模型难免引入数值误差。本文开展了耦合

变密度地下水流降阶模型与高斯过程的蒙特卡罗模拟(GP-ROMC)研究,在较少计算成本的前提下提升了

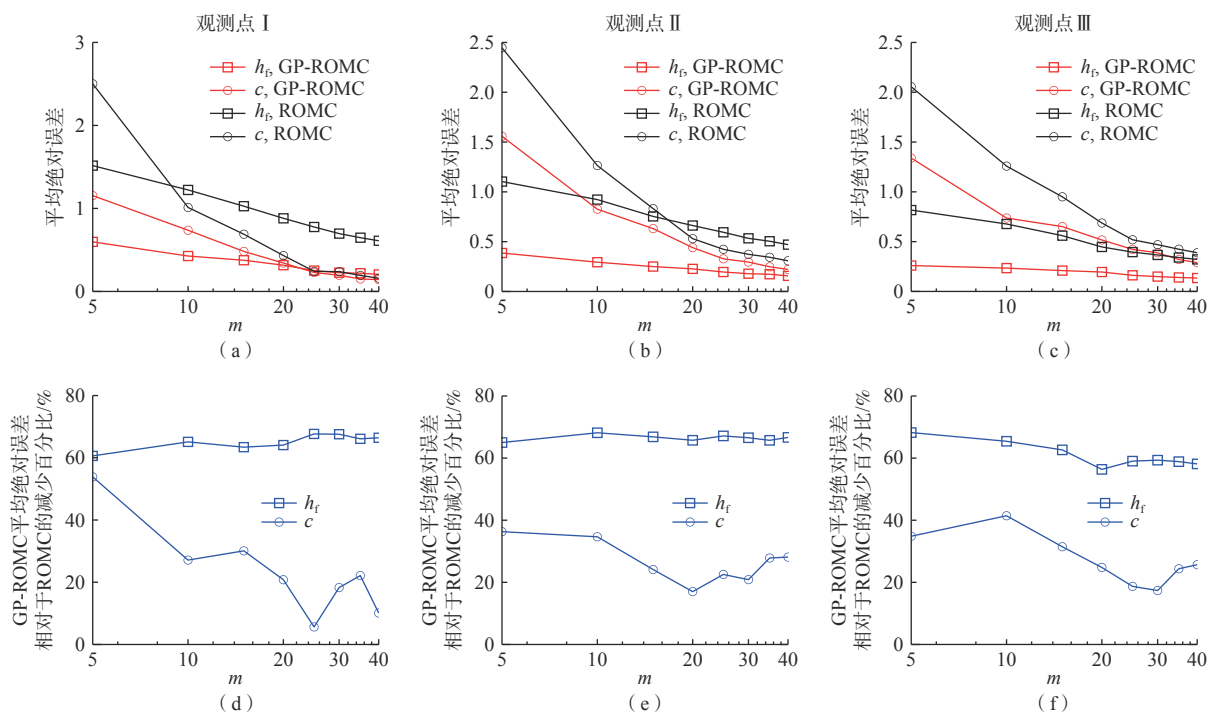


图 12 观测点 I、II 和 III, GP-ROMC 与 ROMC 获得水头与盐度的平均绝对误差和 GP-ROMC 平均绝对误差相对于 ROMC 的减少百分比随 m 的变化曲线

Fig. 12 Mean absolute error of h_f and c at points I, II, and III obtained through GP-ROMC and ROMC with m increasing from 5 to 40, together with the percentage of decrease of the mean absolute error obtained through GP-ROMC with reference to ROMC

含水层关键点位(例如监测井)的蒙特卡罗模拟精度。虽然研究结果总体显示 GP-ROMC 能适应不同降阶模型维度用以提高蒙特卡罗模拟精度,但还有一些问题值得进一步讨论分析,为下一步研究工作打下基础。

4.1 FSM 数值解采集方式

稳定流条件下,用于构建降阶模型的 FSM 数值解选取方式相对简单,不需要考虑地下水流系统在不同时刻的动态变化情况。Xia 等^[21]在定密度稳定地下水流情况下,直接选取一定数量的 FSM 数值解用于构建降阶模型,且通过求解随机地下水流统计矩方程获得降阶模型的基。Pasetto 等^[22]在非稳定流条件下,采集了不同时刻 FSM 数值解并更新了基,用于构建定密度地下水流的降阶模型,同时指出并不需要在每个时间步长都更新基。本文采集了每个时间步长的 FSM 数值解并利用它们计算降阶模型的基,方法更简单且计算量更小,但同时引入了额外的计算误差。分别采集每个时刻的 FSM 数值解并更新降阶模型的基,可减小计算误差,但也会增大建模难度和计算量。从图 2(b)——(d)观察到的盐度降阶模型误差较小,但从图 8(a)(e)的结果可见 ROMC 与 FSMC 的水头与盐度均值差别较大,所以 FSM 数值解的采集方式可能还需要进一步提高以提高 ROMC 自身的模拟精度。

4.2 水头与盐度的 Karhunen–Loève 表达

使用式(4)而非(5)近似 h_f 和 c 会引入额外的计算误差,特别是当 $\langle h_f \rangle$ 与 $\langle c \rangle$ 明显大于零时。以 FSMC 在最后时刻的数值解为参考, $N_s=500$, $m=5$, 使用式(4)(5)近似水头的平均均方根误差分别为 0.182 1 和 0.180 6, 近似盐度的平均均方根误差分别为 0.177 5 和 0.175 8。结果说明使用式(4)近似水头和盐度时误差相对更小。此外,相比于式(5),使用式(4)构建降阶模型的离散方程更简单,编码更容易,计算量更小。

4.3 CPU 时间

GP-ROMC 的计算可以划分为 4 个部分:(1)构建 ROM 模型,包括采集 FSM 数值解与奇异值分解获取水头和盐度的基;(2)开展 ROMC 模拟;(3)构建并训练 GP 模型,包括计算 ROM 模型误差和获取渗透系数基的系数;(4)利用 GP 模型模拟 ROM 模型误差。这 4 个部分中,相对于第(2)部分,其余 3 个部分计算量很小可忽略不计。关于第(2)部分,变密度地下水流系统受水力梯度与密度梯度共同作用,无论是全阶模型还是降阶模型都需要迭代计算 2 个子系统。使用处理器: 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13700K 3.40 GHz、RAM: 32G 的电脑时,单个全阶模型运算大约需要 0.94 s,而单个降阶模型运算在 $m=30, 20, 10, 5$ 时分别需要

0.19, 0.13, 0.08, 0.05 s, $t = 200$ min 时对应的 $\mu_h(\mu_c)$ 的值(图 7)分别为 0.07(0.03), 0.09(0.04), 0.13(0.08) 和 0.16(0.16)。此外, 值得指出的是本文提出的方法在三维变密度地下水流问题中的计算优势会比二维更突出, 因为 FSM 的总纲矩阵与二维问题相比通常具有更大的带宽, 而降阶模型与带宽无关。

5 结论

(1) 由 ROMC 获得水头与盐度受 m 的影响不同, 相对于水头, 盐度的精度对 m 更敏感, 收敛速率更快。 μ_h 与 μ_c 与 m 的关系均可用指数函数(即 $y = ax^b$)刻画: 不同时刻的回归结果显示指数函数的 R^2 多数大于 0.99; μ_h 与 μ_c 分别对应的 β 值在不同时刻差别不大, 均值分别约为 -0.48 和 -0.98。

(2) ROMC 获得水头与盐度的均值、方差、峰度与偏度等总体能逼近 FSMC 的结果, 说明使用 ROMC 替代 FSMC 总体可行。 η_h 、 σ_h^2 、 κ_h 和 ζ_h 在整个含水层的平均绝对误差分别为 0.35, 1.21, 0.76, 0.13, 平均相对误差分别为 5.27%、21.51%、7.76%、7.72%。 η_c 、 σ_c^2 、 κ_c 和 ζ_c 在整个含水层的平均绝对误差分别为 0.09, 0.21, 2.60, 0.15, 平均相对误差分别为 1.32%、9.96%、28.85%、4.39%。

(3) 在含水层关键监测位置, GP-ROMC 的模拟精度比 ROMC 高, 耦合变密度地下水流降阶模型与高斯过程能在较小计算成本的前提下提高模拟精度。GP-ROMC 能适应不同时刻、不同降阶模型误差量级(对应不同的 m)同时提高水头与盐度模拟精度。

参考文献 (References) :

- [1] 石鸿蕾, 郝奇琛, 邵景力, 等. 基于多源数据的弱透水层水文地质参数反演研究——以呼和浩特盆地某淤泥层为例 [J]. 水文地质工程地质, 2021, 48(2): 1-7. [SHI Honglei, HAO Qichen, SHAO Jingli, et al. Research on hydrogeological parameter inversion of an aquitard based on multi-source data: A case study of a silt layer in the Hohhot Basin [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2021, 48(2): 1-7. (in Chinese with English abstract)]
- [2] 宗成元, 康学远, 施小清, 等. 基于多点地质统计与集合平滑数据同化方法识别非高斯渗透系数场 [J]. 水文地质工程地质, 2020, 47(2): 1-8. [ZONG Chengyuan, KANG Xueyuan, SHI Xiaoqing, et al. Characterization of non-Gaussian hydraulic conductivity fields using multiple-point geostatistics and ensemble smoother with multiple data assimilation method [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2020, 47(2): 1-8. (in Chinese

with English abstract)]

- [3] 钟乐乐, 曾献奎, 吴吉春. 基于高斯过程回归的地下水模型结构不确定性分析与控制 [J]. 水文地质工程地质, 2019, 46(1): 1-10. [ZHONG Lele, ZENG Xiankui, WU Jichun. Quantification and reduction of groundwater model structural uncertainty based on Gaussian process regression [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2019, 46(1): 1-10. (in Chinese with English abstract)]
- [4] 唐亚明, 张茂省. 滑坡风险评价难点及方法综述 [J]. 水文地质工程地质, 2011, 38(2): 130-134. [TANG Yaming, ZHANG Maosheng. Landslide risk assessment difficulties and methods: An review [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2011, 38(2): 130-134. (in Chinese with English abstract)]
- [5] SHI H H, ZENG M, PENG H X, et al. Health risk assessment of heavy metals in groundwater of Hainan Island using the Monte Carlo simulation coupled with the APCS/MLR model [J]. International Journal of Environmental Research and Public Health, 2022, 19(13): 7827.
- [6] 杨运, 吴吉春, 骆乾坤, 等. 考虑预报偏差的迭代式集合卡尔曼滤波在地下水水流数据同化中的应用 [J]. 水文地质工程地质, 2022, 49(6): 13-23. [YANG Yun, WU Jichun, LUO Qiankun, et al. Application of the bias aware Ensemble Kalman Filter with Confirming Option (Bias-CEnKF) in groundwater flow data assimilation [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2022, 49(6): 13-23. (in Chinese with English abstract)]
- [7] 夏传安, 王浩, 简文彬. 基于相关性局域化迭代集合平滑反演渗透系数场 [J]. 水文地质工程地质, 2024, 51(1): 12-21. [XIA Chuan'an, WANG Hao, JIAN Wenbin. Estimation of conductivity fields by using a correlation-based localization scheme of iterative ensemble smoother [J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2024, 51(1): 12-21. (in Chinese with English abstract)]
- [8] XIA C A, LUO X D, HU B X, et al. Data assimilation with multiple types of observation boreholes via the ensemble Kalman filter embedded within stochastic moment equations [J]. Hydrology and Earth System Sciences, 2021, 25(4): 1689-1709.
- [9] BALLIO F, GUADAGNINI A. Convergence assessment of numerical Monte Carlo simulations in groundwater hydrology [J]. Water Resources Research, 2004, 40(4): e2003wr002876.
- [10] XIA C A, HU B X, TONG J X, et al. Data assimilation in density-dependent subsurface flows via localized iterative ensemble Kalman filter [J]. Water Resources Research, 2018, 54(9): 6259-6281.
- [11] CHANG Y W, HU B X, XU Z X, et al. Numerical simulation of seawater intrusion to coastal aquifers and

- brine water/freshwater interaction in south coast of Laizhou Bay, China[J]. *Journal of Contaminant Hydrology*, 2018, 215: 1 – 10.
- [12] XIN P, WANG S S J, SHEN C J, et al. Predictability and quantification of complex groundwater table dynamics driven by irregular surface water fluctuations[J]. *Water Resources Research*, 2018, 54(3): 2436 – 2451.
- [13] YANG H, SHIMADA J, SHIBATA T, et al. Freshwater lens oscillation induced by sea tides and variable rainfall at the uplifted atoll island of Minami-Daito, Japan [J]. *Hydrogeology Journal*; 2020, 28(6): 2105-2114.
- [14] 李英豪, 韩冬梅, 曹天正, 等. 边坡防渗增加灰沙岛地下淡水的试验与数值模拟研究 [J]. *水文地质工程地质*, 2023, 50(2): 13 – 22. [LI Yinghao, HAN Dongmei, CAO Tianzheng, et al. A study of the increase in subsurface freshwater on coral islands by slope seepage control: Experiment and modeling[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2023, 50(2): 13 – 22. (in Chinese with English abstract)]
- [15] 马婧, 鲁春辉, 吴吉春, 等. 一种可增加海岛地下淡水资源储量的方法研究 [J]. *水文地质工程地质*, 2020, 47(3): 1 – 7. [MA Jing, LU Chunhui, WU Jichun, et al. A method for improving the fresh groundwater storage of oceanic islands[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2020, 47(3): 1 – 7. (in Chinese with English abstract)]
- [16] BAUER P, HELD R J, ZIMMERMANN S, et al. Coupled flow and salinity transport modelling in semi-arid environments: The Shashe River Valley, Botswana[J]. *Journal of Hydrology*, 2006, 316(1/2/3/4): 163 – 183.
- [17] 蒙永辉, 王集宁, 张丽霞, 等. 淮河下游典型卤水开采区海咸水入侵趋势研究 [J]. *人民黄河*, 2018, 40(1): 66 – 70. [MENG Yonghui, WANG Jining, ZHANG Lixia, et al. Study on the sea salt water intrusion in typical brine exploration area of the lower Weihe River[J]. *Yellow River*, 2018, 40(1): 66 – 70. (in Chinese with English abstract)]
- [18] JU L, ZHANG J J, MENG L, et al. An adaptive Gaussian process-based iterative ensemble smoother for data assimilation[J]. *Advances in Water Resources*, 2018, 115: 125 – 135.
- [19] SREEKANTH J, DATTA B. Review: Simulation-optimization models for the management and monitoring of coastal aquifers[J]. *Hydrogeology Journal*, 2015, 23(6): 1155 – 1166.
- [20] LAL A, DATTA B. Genetic programming and Gaussian process regression models for groundwater salinity prediction: machine learning for sustainable water resources management[C]//2018 IEEE Conference on Technologies for Sustainability (SusTech). Long Beach: IEEE, 2018: 1 – 7.
- [21] XIA C A, PASETTO D, HU B X, et al. Integration of moment equations in a reduced-order modeling strategy for Monte Carlo simulations of groundwater flow[J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 590: 125257.
- [22] PASETTO D, PUTTI M, YEH W W G. A reduced-order model for groundwater flow equation with random hydraulic conductivity: Application to Monte Carlo methods[J]. *Water Resources Research*, 2013, 49(6): 3215 – 3228.
- [23] LI X Y, CHEN X, HU B X, et al. Model reduction of a coupled numerical model using proper orthogonal decomposition[J]. *Journal of Hydrology*, 2013, 507: 227 – 240.
- [24] LI X Y, HU B X. Proper orthogonal decomposition reduced model for mass transport in heterogenous media[J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2013, 27(5): 1181 – 1191.
- [25] PASETTO D, FERRONATO M, PUTTI M. A reduced order model-based preconditioner for the efficient solution of transient diffusion equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 109(8): 1159 – 1179.
- [26] PASETTO D, GUADAGNINI A, PUTTI M. A reduced-order model for Monte Carlo simulations of stochastic groundwater flow[J]. *Computational Geosciences*, 2014, 18(2): 157 – 169.
- [27] MIAO T S, LU W X, LIN J, et al. Modeling and uncertainty analysis of seawater intrusion in coastal aquifers using a surrogate model: A case study in Longkou, China[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2018, 12(1): 1.
- [28] AYED B, JMAL I, SAHAL S, et al. The seawater intrusion assessment in coastal aquifers using GALDIT method and groundwater quality index: The Djeffara of Medenine coastal aquifer (Southeastern Tunisia)[J]. *Arabian Journal of Geosciences*, 2018, 11(20): 609.
- [29] BENNER P, GUGERCIN S, WILLCOX K. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems[J]. *SIAM Review*, 2015, 57(4): 483 – 531.
- [30] GUO W, LANGEVIN C D. User's guide to SEAWAT: A computer program for simulation of three-dimensional variable-density ground-water flow [R]. Tallahassee: U. S. Geological Survey, 2002.
- [31] ZHENG C, WANG P. MT3DMS: A Modular three-dimensional multispecies transport model for simulation of advection, dispersion, and chemical reactions of contaminants in groundwater systems: Documentation and user's guide[R]. Tuscaloosa: Department of Geological Sciences University of Alabama, 1999.