

DOI:10.19751/j.cnki.61-1149/p.2020.04.017

基于参数相关的 Bayes 估计及在黄土边坡可靠度分析中的应用

董莺花¹, 李萍^{1*}, 夏增选¹, 李同录¹, GRIFFITHS D V², 侯晓坤^{1,3}

(1. 长安大学地测学院,陕西 西安 710054;2. Department of Civil and Environmental Engineering, Colorado School of Mines, Colorado Golden USA Colorado, 80401;3. 中国科学院地质与地球物理研究所,北京 100029)

摘要:黄土强度参数具有一定的相关性。在传统的边坡稳定性计算中,常把黄土强度参数 c 、 φ 值视为独立的 2 个参数,忽略了其相关性,导致计算结果存在一定的偏差。笔者采用二维联合正态分布拟合黄土强度参数的概率密度函数,应用 Bayes 公式对函数参数的取值进行优化。以西安咸阳机场排污口潜在滑坡为例,计算该边坡可靠性指标。研究结果表明,利用 Bayes 考虑了工程经验,估计结果的方差减小,使得黄土强度参数估计结果更为稳健,同时也减小因样本数量太少而产生的误差。相关系数对稳定系数几乎没有影响,对可靠度指标和失效概率的影响较大。当利用可靠度理论评价边坡稳定性时,不考虑 c 、 φ 值正相关系数,边坡的稳定性则会被高估;不考虑 c 、 φ 负相关性时,将严重低估边坡的稳定性。采用二维联合正态分布的 Bayes 估计强度参数,可对黄土边坡稳定性进行更为准确的评价。

关键词:黄土边坡;Bayes 理论;可靠度;相关性

中图分类号:P642.13

文献标志码:A

文章编号:1009-6248(2020)04-0186-08

Parameters-based Bayes Estimation and Its Application in the Reliability Analysis of Loess Slope

DONG Luanhua¹, LI Ping^{1*}, XIA Zengxuan¹, LI Tonglu¹, GRIFFITHS D V², HOU Xiaokun^{1,3}

(1. School of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, Shaanxi, China; 2. Department of Civil and Environmental Engineering, Colorado School of Mines, Colorado Golden 80401, Colorado, USA;
3. Institute of Geology and Geophysics, CAS, Beijing 100029, China)

Abstract: There is a correlation between each loess strength parameters. In the traditional slope stability calculation, the loess strength parameters c and φ are often seen as two independent random variables. The neglect of their correlation leads to calculation deviation. In this paper, the two-dimensional joint normal distribution is used as the distribution profile of the loess strength parameters, and the Bayes formula is to optimize the parameters. Taking as an example of the potential landslide in the sewage outlet of Xi'an Xianyang Airport, the reliability index of the slope is calculated. The results show that Bayes makes it possible to reduce the variance of the esti-

收稿日期:2019-11-06;修回日期:2020-08-14

基金项目:国家自然科学基金项目“黄土台塬灌区边坡可靠度及其防治及稳健决策”(41877242)

作者简介:董莺花(1994-),女,广西贺州人,本科毕业生,主要研究黄土边坡可靠度。E-mail:2019226071@chd.edu.cn

* 通讯作者:李萍(1971-),女,内蒙古临河人,教授,工学博士,主要研究黄土路堑稳定性的可靠度。E-mail:dcdgx07@chd.edu.cn

mated results, to get more reliable estimated results of loess strength parameter and what's more, to avoid errors caused by small sample size. Correlation coefficient nearly has no effect on stability coefficient, but has much effect on the reliability index and the failure probability. The stability of the slope will be over-estimated without considering the positive correlation coefficient of c and φ value. The stability of the slope will be seriously under-estimated when the c and φ negative correlation is not taken into account. The estimated strength parameters from Bayes of two-dimensional joint normal distribution evaluate accurately the stability of loess slope.

Keywords: loess slope; Bayes theory; reliability; correlation

中国西北地区为典型的黄土地貌。黄土滑坡灾害是黄土地区较为常见的地质灾害。随着经济的增长,加强了黄土地区的工程活动,黄土边坡稳定性评估成为亟待解决的问题(穆鹏,2009)。

近年来,也有许多学者针对黄土边坡的稳定性进行研究,并发表了一系列优秀的文章,形成了很多比较成熟的理论方法。如极限平衡法、可靠度分析法和数值分析法等。在评价边坡稳定性的过程中,由于存在很多人为和复杂自然环境等因素,给边坡稳定性评价带来了很多不定性因素(李萍,2006)。因此,边坡稳定性的计算结果存在很大不确定性。为了能够充分考虑到边坡中众多不确定因素,人们将统计学中的可靠度理论运用到边坡稳定性评价。Taylor 解释了考虑土体强度内聚力 c 和摩擦力 φ 分量不同的不确定性的必要性(TAYLOR,1948)。周伟利用可靠度方法,估算对矿床质量可信度来解决矿石质量、形态变异性显著问题(周伟等,2006)。可靠度计算方法有一次二阶矩法、点估计法和蒙特卡洛法等。一般来说,在不考虑地下水的情况下,土的强度参数主要是土的粘聚力 c 和土的内摩擦角 φ ,也是计算稳定系数的重要数据。但是不同的土具有不同的强度参数,即使是同一种土也会因为深度、环境、测试方法、扰动程度等多种原因而出现差异。所以在通过工程实验获得的参数具有很大的不确定性。但根据倪万魁、毕树欣等人的研究,发现土的强度参数也具有一定的相关性(倪万魁,2002;毕树欣,2011,郭重阳,2018)。目前,有很多文章将 c 、 φ 作为随机变量,对黄土边坡可靠性做出了大量的研究,但对 c 、 φ 相关性的讨论较少,通常都将 c 、 φ 值视为独立变量统计参数,并用一维概率密度函数分别表达其分布函数(李萍等,2013,2019;高德彬等,2004;叶万军等,2005;张亚国等,2011;王阿丹等,2012;陈春利等,2011;刘焕喜等,2001;王永刚等

2006)。现如今比较普遍的观点是黄土强度参数 c 和 φ 具有负相关性,且相关系数大多介于 $-0.8 \sim -0.2$ 。

针对一个具体工程,黄土强度参数的试验数据往往较少,难以准确地判断黄土强度参数的分布模型。为了克服试验参数不足的问题,可用 Bayes 公式来估计参数的统计特征。Bayes 统计理论能将实验数据、工作经验、前人所做的实验信息充分结合估计统计参数的特征,因此利用 Bayes 公式对参数进行统计考虑的信息更全面。Bayes 统计被广泛应用于各个与统计有关的行业。目前,已有许多学者将 Bayes 理论应用到边坡工程中。如李东钊利用 Bayes 理论对黏性土边坡模型的不确定性进行分析,结果表明,Bayes 理论能很好的描述黏性土边坡稳定不确定性(李东利,2014)。唐震以大唐锡林浩特胜利东 2# 矿泥岩边坡为例,将模糊学方法和 Bayes 理论结合,为小样本情况下确定参数的分布类型提供途径(唐震等,2011)。HE Qing 根据两阶段贝叶斯学习的岩石 UCS 数据分析方法,提出了优化岩石的抗压强度的方法(HE Qing, et al., 2020)。AKEJU O V 等人提出了一种利用贝叶斯方法量化数据离散性,估计模型参数的最优值(AKEJU O V, et al., 2019)。虽然该类方法被广泛运用,但在黄土边坡中鲜有提到。

考虑到 c 、 φ 值具有一定的相关性,笔者采用二维联合正态分布表示随机参数的概率组合。用 Bayes 公式结合历史数据对实验数据进行优化,然后用优化后的强度参数结合工程案例计算黄土边坡可靠度,分析黄土强度参数服从均服从正态分布下相关系数对边坡可靠度的影响。

1 联合概率密度函数及假设检验

在边坡工程中常用二维正态分布表示土体强度

参数 c, φ 值的联合概率密度函数, 二维正态分布的概率密度函数表达式如式(1)

$$f(c, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_\varphi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c}\right)^2 - 2\rho\frac{(c-\mu_c)(\varphi-\mu_\varphi)}{\sigma_c\sigma_\varphi} + \left(\frac{\varphi-\mu_\varphi}{\sigma_\varphi}\right)^2\right]\right) \quad (1)$$

记为 $f(c, \varphi) \sim N(\mu_c, \mu_\varphi, \sigma_c^2, \sigma_\varphi^2, \rho)$, 其分布形式依赖于 5 个参数。这 5 个参数的含义是: μ_c 为主函数 c 的均值; μ_φ 为主函数 φ 的均值; σ_c 为主函数 c 的标准差; σ_φ 为主函数 φ 的标准差。 ρ 为 2 个主函数 c, φ 的相关系数。当 2 个参数均服从正态分布时, 相关系数越接近于零, 则 2 个参数的相关程度越弱, 若相关系数为零, 可以认为 c 与 φ 相互独立。相关系数 ρ 的计算公式如式(2)

$$\rho = \frac{\text{COV}(c, \varphi)}{\sqrt{D_c \cdot D_\varphi}} \quad (2)$$

式中 $\text{COV}(c, \varphi)$ 为随机变量 c 和 φ 的协方差, D_c 和 D_φ 分别为 c 和 φ 的标准差。

二维正态分布假设是否正确, 可以用 $K-S$ 法进行分布检验(赵宇飞, 2006)。首先利用公式(3)对坐标轴进行旋转, 将二维分布参数 c_i, φ_i 转化为标准的二维正态分布参数 c'_i, φ'_i 。

$$\begin{pmatrix} c'_i \\ \varphi'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i - \mu_c \\ \varphi_i - \mu_\varphi \end{pmatrix} \quad (3)$$

再利用极坐标公式如式(4), 将标准二维正态分布参数 c'_i, φ'_i 转化一维瑞利分布的参数 k_i 。

$$\frac{c'^{'}_i}{A^2} + \frac{\varphi'^{'}_i}{B^2} = k_i^2 \quad (4)$$

未知数 A、B 取值如公式(5)

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{\sigma_c^2 \sin^2\theta - \sigma_\varphi^2 \cos^2\theta}{\sin^4\theta - \cos^4\theta} \\ B^2 &= \frac{\sigma_\varphi^2 \sin^2\theta - \sigma_c^2 \cos^2\theta}{\sin^4\theta - \cos^4\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

一维瑞利参数 k_i 的概率分布函数如式(6)

$$F((c_i^2, \varphi_i^2) \in D_{k_i}) = 1 - \exp\left(-\frac{k_i^2}{2}\right) \quad (6)$$

剔除粗差参数后, 对 k_i 进行 $K-S$ 检验, 若 k_i 服从瑞利分布, 则黄土强度参数 c, φ 服从二维正态分布。

2 强度参数 Bayes 估计

Bayes 公式能够充分利用样本信息和先验信息

得到更符合实际的后验信息。Bayes 基本公式如式(7)

$$\pi(\theta | x) = \frac{p(\theta | x)\pi(\theta)}{\int p(\theta | x)\pi(\theta) d\theta} \quad (7)$$

式中 $\pi(\theta | x)$ 为参数的后验概率, 即为有的实验信息在经过结合了经验或历史数据优化后的结果; $\pi(\theta)$ 为参数的先验分布; $p(x | \theta)$ 表示随机变量 θ 给定时 x 的概率密度函数, 即样本信息; $\int(x | \theta)\pi(\theta)d\theta$ 为 x 的边缘概率密度函数。

对于黄土边坡, 可以用二维正态分布 $N_1(\mu_{c1}, \mu_{\varphi 1}, \sigma_{c1}^2, \sigma_{\varphi 1}^2, \rho_1)$ 表示参数 c, φ 值的先验信息的联合概率密度函数。对于样本参数可根据试验数据, 先假设服从二维正态分布 $N_2(\mu_{c2}, \mu_{\varphi 2}, \sigma_{c2}^2, \sigma_{\varphi 2}^2, \rho_2)$, 然后再用 $K-S$ 法对参数进行假设检验。先验信息参数的确定可以通过查阅相关资料获取也可以通过经验获取, 样本参数联合概率密度函数需根据试验数据统计获得。根据公式(7)计算后验参数概率密度函数如式(8)。

$$f(c', \varphi') = \frac{N_1(\mu_{c1}, \mu_{\varphi 1}, \sigma_{c1}^2, \sigma_{\varphi 1}^2, \rho_1) \cdot N_2(\mu_{c2}, \mu_{\varphi 2}, \sigma_{c2}^2, \sigma_{\varphi 2}^2, \rho_2)}{\iint f(c_1, \varphi_1) \cdot f(c_2, \varphi_2) d\Omega} \quad (8)$$

根据公式(8)计算过结果可得, 样本和先验参数联合概率密度函数为二维正态分布, 后验分布也为二维正态分布。后验参数的联合概率密度函数用 $N'(\mu'_c, \mu'_\varphi, \sigma'_c, \sigma'_\varphi, \rho')$ 表示。

3 工程实例分析

西安咸阳机场排污口潜在滑坡位于西安咸阳国际机场, 经咸阳市渭城区, 其排口位于泾阳县高庄镇傅家村黄土台塬下泾河高漫滩。该边坡地层主要为第四系中晚更新统风积黄土, 夹古土壤。其上覆盖 10 m 左右的上更新统黄土底部为晚更新世黄土。根据规范该边坡被分成早更新世黄土 Q1、中更新世黄土 Q2 和晚更新世黄土 Q3。通过现场勘查发现, 该边坡在水流入渗的影响下有发生滑动的危险, 因此, 需要对该滑坡稳定性进行研究。样本强度参数通过钻孔采取样本, 采用直剪试验测试。为了验证实验数据是否服从二维正态分布, 可以利用公式(3)、(4)、(5)进行 $K-S$ 转换检验。

根据结果, 认为黄土强度参数服从二维正态分

布。先验信息既可以是通过经验进行判断,也可以通过查阅相关资料获得。咸阳机场排污口潜在滑坡位于汾渭盆地,将李萍等对汾渭盆地黄土试验与调查得到的强度参数统计值作为汾渭盆地的黄土强度参数先验信息(李萍等,2012)。将样本信息与先验信息带入公式(8)计算得各地层后验强度参数统计值。样本参数、先验参数和计算得到的后验参数统计值如表1所示。利用 Geo-slope 建立地质模型,坡高 85 m,坡比为 1:1.47,地层从顶部到底部为

Q_3 黄土约 10 m, Q_2 黄土约 75 m, 下层为 Q_1 黄土。地质模型如图1所示。

以 Q_3 为例,绘制样本、先验、后验参数的概率分布图,分别为图2、图3和图4。

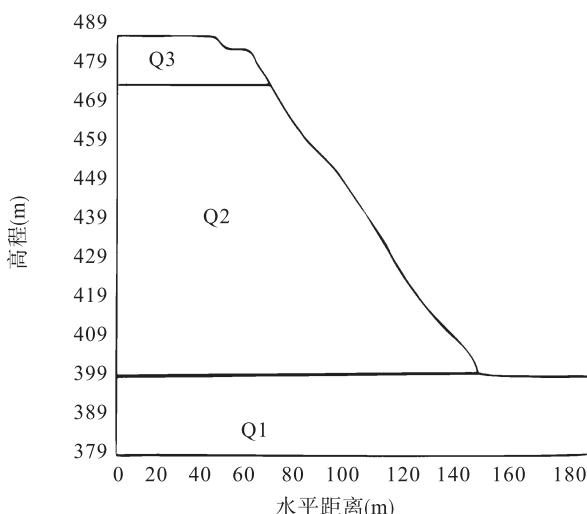
根据表1和图2、图3、图4可知,经过 Bayes 优化后的参数均值介于样本与先验参数均值之间,但标准差较先验和样本的更小,概率分布图更集中,表明了参数的波动性变小,比较集中于某一个范围。因此利用 Bayes 优化后的参数更稳健。

表1 各地层先验、样本、后验参数统计值表

Tab. 1 Statistical values of priori, sample and posterior parameters in various layers

数据类型	粘聚力 c (kPa)		内摩擦角 φ (°)		相关系数 ρ	
	均值 μ_c	标准差 σ_c	均值 μ_φ	标准差 σ_φ		
Q_3	样本	32.0	8.6	26.2	3.6	0.35
	先验	39.1	17.8	23.7	5.5	-0.2
Q_2	后验	33.2	7.5	25.5	2.9	0.23
	样本	47.0	18.0	28.2	2.4	0.25
Q_1	先验	47.9	18.3	24.9	6.5	-0.2
	后验	47.4	12.6	27.8	2.2	0.12
	样本	65.6	16.37	28.5	0.8	-0.41
	先验	71.7	20.9	28.3	8.4	-0.2
	后验	67.3	12.8	28.5	0.8	-0.34

注:数据来源:1. 样本数据;长安大学地测学夏增选测试,测设方法为 CD。2. 先验数据;李萍 2012 测试整理(李萍,2012)。



Q1. 为早更新世黄土;Q2. 中更新世黄土;Q3. 晚更新世黄土

图1 边坡剖面图

Fig. 1 Geological model

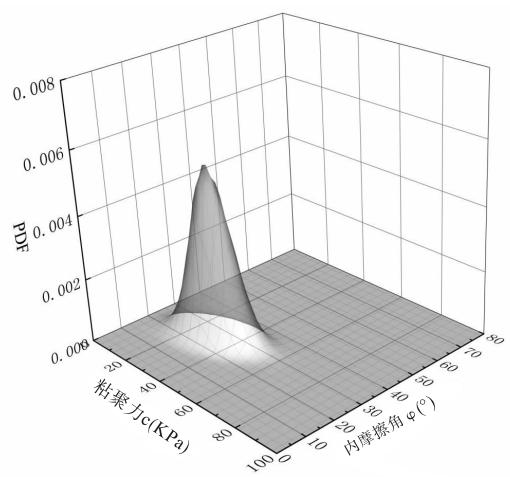


图2 样本参数概率分布图

Fig. 2 Probability distribution of sample parameters

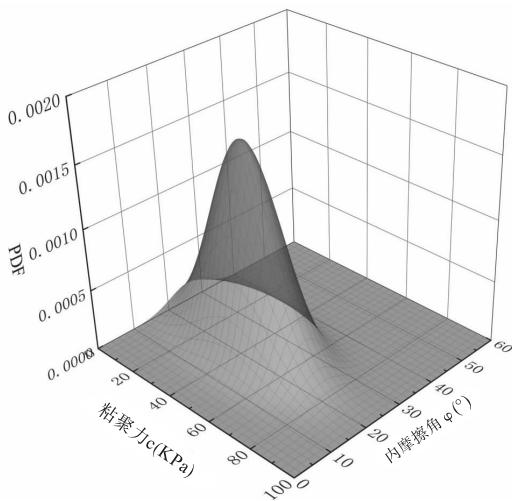


图 3 先验参数概率分布图

Fig. 3 Probability distribution of priori parameters

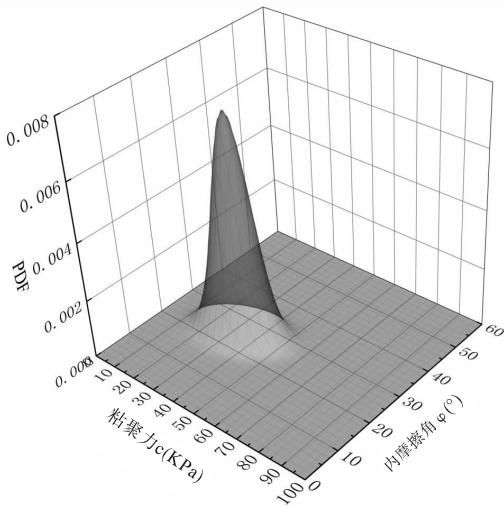


图 4 后验参数概率分布图

Fig. 4 Probability distribution of posterior parameters

确定参数的概率分布形式后,可以根据勘察资料利用 studio 软件建立边坡模型图,给 c, φ 赋予一个服从二维正态分布的函数。在利用 Monte-Carlo 法随机抽取 5 000 个数据,计算对应的稳定系数、失效概率和可靠度指标。计算结果见表 2。

根据表 2 可知,利用 Bayes 优化后的参数计算得到的稳定系数均值介于样本和先验参数计算得到的稳定系数均值之间,但是三者的差别很小。稳定系数的标准小于样本和先验参数计算到的标准差。可靠指标 β 和失效概率有比较明显的差距,经过 Bayes 优化后的参数计算得到的可靠指标 β 大于先验和样本,失效概率 P_f 小于先验和样本,这主要是

因为在边坡均值相同的条件下,经 Bayes 估计参数标准差减小,失效概率有较大幅度的降低。因此,结合了先验信息分析边坡稳定性计算结果,稳健性高,更为可靠。

表 2 样本、先验、后验可靠度计算结果表

Tab. 2 Calculation results of posterior test, priori and sample reliability

计算指标	样本	先验	后验
稳定系数 F_s 均值 μ_F	1.039	1.035	1.038
可靠指标 β	0.307	0.211	0.405
失效概率 P_f (%)	38.0	43.3	34.0
稳定系数 F_s 标准差 σ_F	0.127	0.164	0.093

4 相关系数对可靠度指标的影响

相关系数是联合概率密度函数的一个重要参数,也是描述 2 个参数是否独立的一个重要指标。根据公式(8)及表 2 可知,后验的相关系数与样本和先验数据有关,其结果的相关系数介于两者之间,利用 Bayes 公式优化的黄土强度参数概率密度函数变量一共有 5 个。因此,边坡稳定性的计算结果受到这 5 个参数的影响。这 5 个参数中均值是影响稳定系数大小的最主要的因素,也是带入安全系数最重要的参数,标准差则是影响结果的精确度,标准差越小说明结果越准确。为了分析相关系数对稳定性计算结果的影响,以及相关系数的影响趋势是否会因为 c, φ 取值的不同而有所差异,笔者将标准差设为定值,分析在不同的 c, φ 下相关系数的变化对可靠度的影响。因此,笔者设置 4 个均值大小不同的方案,分析相关系数变化对可靠度指标的影响。根据资料可知,土的强度参数的相关系数范围取 $-0.8 \sim 0.8$,每增加 0.2 取一个相关系数。 c, φ 的设计值见表 3。

计算边坡的稳定系数均值和标准差、可靠指标和失效概率,根据计算结果绘制可靠度指标随相关系数的变化曲线(图 5、图 6、图 7、图 8)。

根据图 6 可见,相关系数对可靠指标的影响显著。可靠指标随相关系数的增大而减小,相关系数小于 0 时,可靠指标的变化率更大。稳定系数越大,可靠指标的变化范围越大,稳定系数 $F_s=1.01$,相关系数由 -0.8 增加到 0.8 ,可靠指标由 0.305 减

表3 地层参数取值表
Tab. 3 Stratigraphic parameter values

地层	统计值	方案一	方案二	方案三	方案四
		Fs=1.01	Fs=1.04	Fs=1.20	Fs=1.28
Q ₃	c 均值 μ_c	30.0	33.0	36.0	40.0
	c 标准差 σ_c	8.6	8.6	8.6	8.6
	φ 均值 μ_φ	25.0	26.0	28.0	29.0
	φ 标准差 σ_φ	3.6	3.6	3.6	3.6
Q ₂	γ 均值	14.8	14.8	14.8	14.8
	c 均值 μ_c	50.0	55.0	60.0	65.0
	c 标准差 σ_c	12.6	12.6	12.6	12.6
	φ 均值 μ_φ	26.0	28.0	29.0	30.0
Q ₁	φ 标准差 σ_φ	2.2	2.2	2.2	2.2
	γ 均值	18.1	18.1	18.1	18.1
	c 均值 μ_c	67.0	68.0	70.0	75.0
	c 标准差 σ_c	12.8	12.8	12.8	12.8
Q ₁	φ 均值 μ_φ	28.0	29.0	30.0	32.0
	φ 标准差 σ_φ	0.8	0.8	0.8	0.8
	γ 均值	19.56	19.56	19.56	19.56

小到 0.101; 稳定系数 $F_s = 1.22$, 相关系数由 -0.8 增加到 0.8, 可靠指标由 6.582 减小到 2.054; 稳定系数相同时, 相关系数为负值时, 可靠指标与负相关系数的变化曲线斜率大于相关系数为正时的斜率, 即负相关性对可靠指标的影响较大。

根据图 7 可见, 相关系数的变化对失效概率的影响很大。失效概率随正相关性的增强而增大, 随负相关性加强而减小。相关系数对失效概率的影响与稳定系数密切相关。稳定系数 $F_s = 1.01$, 相关系数由 -0.8 增加到 0.8, 失效概率由 34.6% 增加到 46.7%, 增长率为 35%; 稳定系数 $F_s = 1.07$, 相关系数由 -0.8 增加到 0.8, 失效概率由 2.5% 增加到 25.6%, 增长率为 924%; 稳定系数 $F_s = 1.22$, 相关系数由 -0.8 增加到 0.8, 失效概率由 0.2% 增加到 8.3%, 增长率为 4 050%。可见从增长率看, 边坡越稳定, 即稳定系数越高, 相关系数对失效概率的影响越显著。由曲线的斜率可知, 相关系数在 0~0.2, 失效概率几乎没有变化, -0.2~0, 失效概率急剧下降, 即当土的强度参数居于负相关的性质, 对失效概率的影响较大。

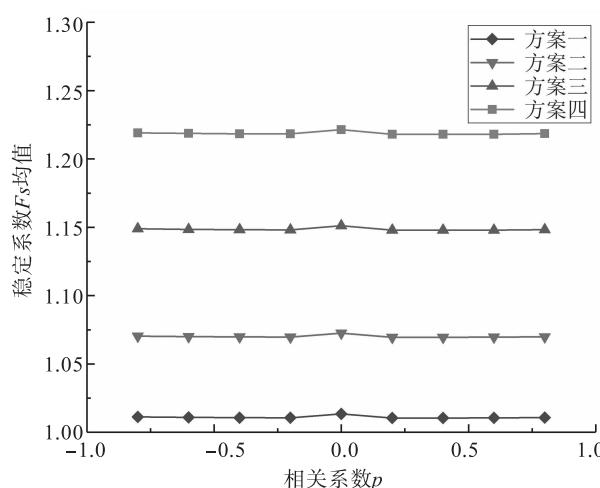


图 5 稳定系数 F_s 随相关系数的变化曲线图

Fig. 5 Variation curve of stability coefficient F_s with correlation coefficient

稳定系数的均值与参数的均值有关, 应用 Monte-Carlo 法抽样法时, 基于数据的分布类型进行随机抽样。所以, 当 2 个参数呈负相关性时, 抽取的参数会随其中一个的增大而减小的概率大; 当 2 个参数正相关性时, 抽取的参数同时增大或同时减

小的概率大,所以出现图 8 所示的稳定系数标准差随相关系数的增大而增大的现象。这也解释了失效概率随相关系数增大而增大,可靠指标随相关系数增大而降低的现象。

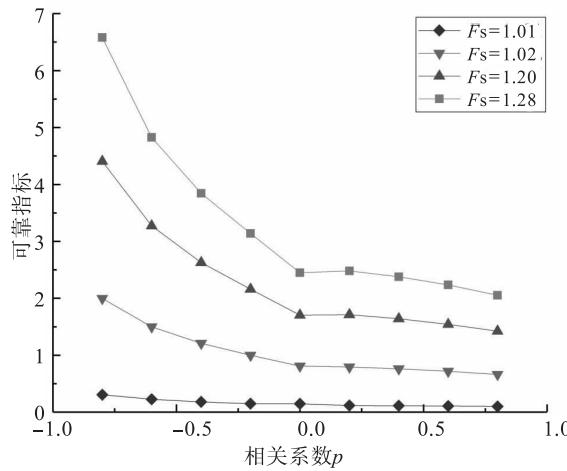


图 6 可靠指标随相关系数的变化曲线图

Fig. 6 Variation curve of reliability index with correlation coefficient

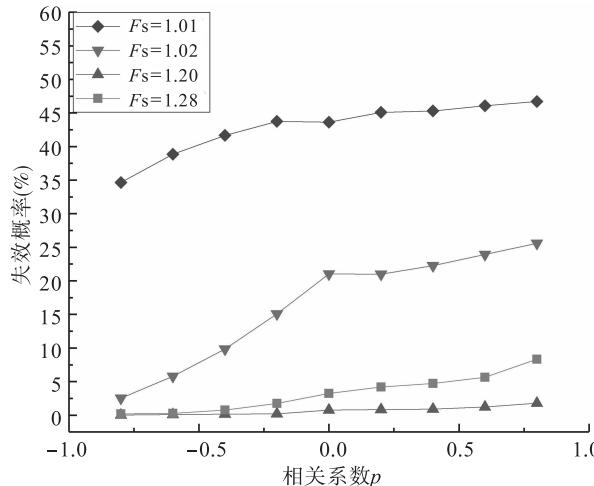


图 7 失效概率随相关系数变化曲线图

Fig. 7 Variation curve of failure probability with correlation coefficient

5 结论

(1)采用二维联合正态分布拟合了黄土强度参数的概率分布,并用 K-S 法检验了分布的合理性,结果表明黄土强度参数较好地服从二维联合正态分

布。将工程实例的勘察资料数据为样本信息,利用其他资料或收集该工程区域的相关数据作为先验信息,采用 Bayes 公式对黄土强度进行了优化,优化后的后验分布方差更小,对参数的估计稳健性提高。

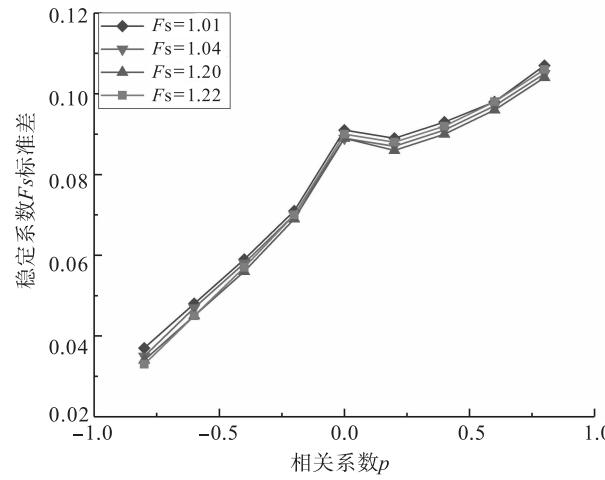


图 8 稳定系数 F_s 标准差随相关系数的变化曲线图

Fig. 8 Variation curve of the stability coefficient F_s standard deviation with the correlation coefficient

(2)假定参数的均值和方差为定值,相关系数从取值为 $-0.8 \sim 0.8$,分析 c, φ 值相关系数对可靠度的影响,研究结果表明相关系数的变化对边坡的稳定系数影响较小,对可靠指标与失效概率的影响较大。不考虑 c, φ 值正相关系数,对边坡失效概率的估计结果偏小,则有可能将不稳定的边坡评价为稳定的边坡。不考虑 c, φ 负相关性时,对边坡失效概率的计算结果偏大,使得评价稳定性时过于保守,在进行边坡治理时可能会出现资源浪费的情况。可靠度指标对 c, φ 值负相关系数的变化更敏感。在自然状态下,黄土强度参数 c, φ 值的相关系数多为负值。在对黄土边坡进行可靠度分析,不能忽视参数间的相关性。

参考文献(References):

- 穆鹏. 兰州石峡口滑坡稳定性分析与治理工程设计研究[D]. 兰州: 兰州大学, 2006.
MU Peng, Stability Analysis and Treatment Design Research on Shixiakou Landslide in Lanzhou[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2006.
- 李萍. 黄土边坡可靠性研究[D]. 陕西: 长安大学, 2006.
LI Ping. Reliability Research of Yellow Soil Slope[D]. Xi'an: Xian Jiaotong University, 2006.

- LI Ping. Reliability Applied to Stability Analysis of Loess-Slope[D]. Shaanxi: Chang'an University, 2006.
- 周伟. 矿床储量(质量)稳定性趋势分析和可靠程度判定——对陕西旬阳姚沟铜矿勘查成果分析的思考[J]. 西北地质, 2016, 49(03): 141-147.
- ZHOU Wei. Stability Trend and Reliability about Reserves (Quality) of Ore Deposits[J]. Northwestern Geology, 2016, 49(03): 141-147.
- 倪万魁,牛富俊,刘东燕. 黄土土性的空间自相关性研究[J]. 西安工程学院学报, 2002, 24(2): 4-8, 12.
- NI Wankui, NIU Fujun, LIU Dongyan. A Study on the Spatial Self-correlation of Loess Parameters[J]. Journal of Xi'an Polytechnic University, 2002, 24(2): 4-8, 12.
- 毕树欣,岩土参数的相关性检验[J]. 城市建设理论研究(电子版), 2011, (36).
- 郭重阳,李典庆,曹子君,等. 考虑空间变异性条件下的边坡稳定可靠度高效敏感性分析[J]. 岩土力学 2018, 39(6): 2203-2210.
- GUO Chongyang, LI Dianqing, CAO Zijun, et al. Efficient Reliability Sensitivity Analysis for Slope Stability[J]. Rock and Soil Mechanic, 2018, 39(6): 2203-2010.
- 李萍,白健忠,GRIFFITHS D V,等. 黄土边坡可靠度的随机有限元分析[J]. 地球科学与环境学报, 2019, 41(01): 116-126.
- LI Ping, BAI Jianzhong, GRIFFITHS D V, et al. Random Finite Element Analysis for the Reliability of Loess Slopes[J]. Journal of Earth Sciences and Environment, 2019, 41(01): 116-126.
- 李萍,王宁,高德彬,等. 山西河南西部地区黄土高边坡可靠度分析[J]. 西安建筑科技大学学报(自然科学版), 2013, 45(04): 574-581.
- LI Ping, WANG Ning, GAO Debin, et al. Analysis on the reliability of the loess slopes in West Shanxi and Henan Provinces[J]. Journal of Xi'an University of Architecture & Technology (Natural Science Edition), 2013, 45(04): 574-581.
- 高德彬,倪万魁,梁伟. 基于 Monte-Carlo 模拟的公路黄土高边坡可靠性研究[J]. 公路交通科技, 2005(S): 70-72.
- GAO Debin, NI Wankui, LIANG Wei. Reliability Analysis on Highway Loess Slope Stability Based on Monte-Carlo Method[J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2005(S): 70-72.
- 叶万军,折学森,等. 基于可靠度理论的黄土高边坡优化设计[J]. 地球科学与环境学报, 2005(02): 82-85.
- YE Wanjun, SHE Xuesen, et al. Optional design of high loess slope in highway based on reliabilitymethod [J]. Journal of Earth Sciences and Environment, 2005(02): 82-85
- 张亚国,张波,李萍,等. 基于点估计法的黄土边坡可靠度研究[J]. 工程地质学报, 2011, 19(04): 615-619.
- ZHANG Yaguo, ZHANG Bo, LI Ping, et al. Research on loess slope reliability based on the Point estimate Method[J]. Journal of Engineering Geology, 2011, 19(04): 615-619.
- 王阿丹,王昌业,李萍,等. 西安白鹿原北缘黄土边坡稳定的可靠度分析[J]. 地球科学与环境学报, 2012, 34(01): 104-110.
- WANG Adan, WANG Changye, LI Ping, et al. Reliability analysis for stability of loess slopes along the northern edge of Bailuyuan, Xi'an[J]. Journal of Earth Sciences and Environment, 2012, 34(01): 104-110.
- 陈春利,邢鲜丽,李萍,等. 肃黑方台黄土边坡稳定性的可靠度分析[J]. 工程地质学报, 2011, 19(04): 550-554.
- CHEN Chunli, XING Xianli, LI Ping, et al. Analysis on loess slope satbility of Heifangtai, Gansu Province[J]. Journal of Engineering Geology, 2011, 19 (04): 550-554.
- 刘焕喜,刘涌江. 可靠性数学在斜坡稳定性分析中的应用[J]. 西北地质, 2001, 34(02): 37-42.
- LIU Huanxi, LIU Yongjiang. The Reliabilit Mathematics' Application on Analyzing Stability of Slope[J]. Northwestern Geology, 2001, 34(02): 37-42.
- 王永刚,任伟中,陈浩,等. 一次二阶矩法及其在边坡可靠性分析中的应用[J]. 中外公路, 2006(02): 42-46.
- 李东利. 边坡稳定不确定性分析的 Bayesian 方法[D]. 河南:河南理工大学, 2014.
- LI Dongli. Uncertainty Analysis of slope using Bayesian Method[D]. Henan: Henan Polytechnic University, 2014.
- 唐震,舒继森. 基于模糊贝叶斯理论的岩土参数概率分布研究[J]. 煤炭技术, 2011, 30(10): 182-184.
- TANG Zhen, SHU Jisen. Research on Probability Distribution of Rock and Soil Based on Fuzzy BAYESMethod [J]. Coal Thechnology, 2011, 30(10): 182-184.
- 赵宇飞,汪小刚. 岩土强度参数概率分布拟合及贝叶斯优化[A]. 中国岩石力学与工程学会[C]. 岩土力学, 2006: 200-204.
- ZHAO Yufei, WANG Xiaogang. Bayes optimization and fitting research of probability distribution of geotechnical strength parameters[C]. Csrme. Rock and Soil Mechanics, 2006: 200-204.
- TAYLOR, FRANCIS. Erlibility Based Design In Geotechnical Engineering [M]. CRC Press; April 2008. ISBN: 9781482265811.
- BOZORGZADEH N., BATHURST R. J. Bayesian model checking, comparison and selection with emphasis on outlier detection for geotechnical reliability-based design [J]. Computers and Geotechnics, 2019, 116.
- AKEJU O. V., SENETAKIS K., WANG Y. Bayesian Parameter Identification and Model Selection for Normalized Modulus Reduction Curves of Soils[J]. Journal of Earthquake Engineering, 2017, 1-29.
- ZHANG Yaguo, ZHANG Bo, LI Ping, et al. Research on