物探与化探
GEOPHYSICAL AND GEOCHEMICAL EXPLORATION
1999年 第2期 No.2 1999

点源激发瑞利波的半空间波场

赵　东　钟　和　　谭海平

摘　要　用改进的Cagniard-Dehoop方法导出均匀弹性半空间表面点源激发的瑞利波波场位移精确表达式，由此式求得弹性半空间任意点的位移，描绘了稳态和瞬态震源激发的瑞利波波场。
关键词　点源；弹性半空间；Cagniard路径

THE HALF－SPACE WAVEFIELD OF RAYLEIGH WAVE STIMULATED BY A POINT SOURCE

Zhao Dong　Zhong He　Tan Haiping
(Beijing Geotechnical Institute, Beijing　100038)　(Chinese Academy of Geoexploration, Beijing　100083)

Abstract　The accurate displacement expression of Rayleigh wave, stimulated by a point source, on the surface of the half-space ,is deduced by the advanced Cagniard-Dehoop method. The expression in the previous literature can only calculate the displacement of a surface point. The wavefield of Rayleigh wave by the stable and transient source is also described.
Key words　point sources; elastic half-space; Cagniard-Dehoop method

众所周知，均匀弹性半空间表面或内部震源产生的地震波的波场解属于兰姆（Lamb）问题，其中较典型的问题是在弹性半空间表面受到一集中突加垂向负荷的作用时，求该负荷激发的波场位移。Lamb(1904)首先求出此问题的远场近似解，Monney(1974)等用一般的积分变换仅给出半空间表面的波场位移，且其求解过程相当冗长。解决此类问题最简捷的方法是Cagniard-Dehoop方法，可用三重变换求解，但还是繁冗，因为它没有充分利用射线参数和复射线参数平面中积分的性质。这里用改进的Cagniard-Dehoop方法求解，与上述方法相比，该方法不仅给出半空间表面位移，而且能得到弹性半空间中任意点的位移，其中复射线参数平面起着核心作用。

利用该方法求得的表达式和稳态或瞬态震源函数进行简单的褶积，可描绘出这2种震源激发的波动波场分布。

1　解的导出

设有弹性半空间（z≥0），当时刻t=0，在原点O处受到一垂直于表面的集中负荷F的作用（图1）。待确定的是t>0时，该负荷激发的波场分布。

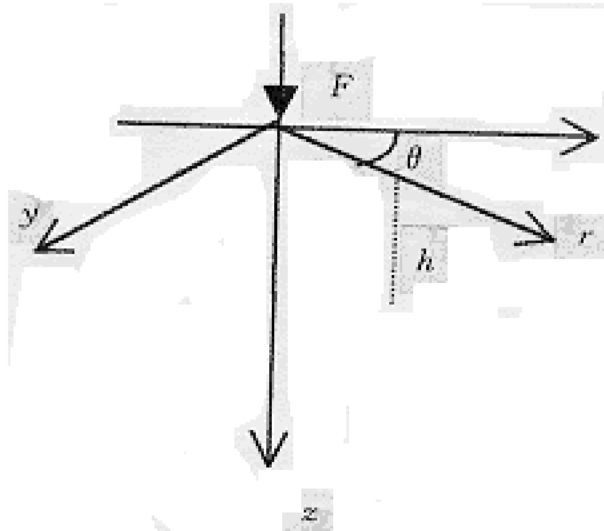


图1　点负荷F作用示意

显然，负荷和介质都关于z轴对称，位移场U也是对称的。因此，在位移场的3个分量（U_r, U_θ, U_z）中，U_θ为零，而U_r和U_z则由下式给出

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \qquad (1)$$

$$U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad (2)$$

式中，$\phi(r,z,t)$和$\Psi(r,z,t)$满足波动方程

$$v_P^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad (3)$$

$$v_S^2 \nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (4)$$

其中，v_P，v_S分别表示纵波和横波速度。应力场为

$$\tau_{zz}(r,z,t)=\lambda\frac{1}{r}\frac{\partial(rU_r)}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_z}{\partial z} \tag{5}$$

$$\tau_{zr}(r,z,t)=\mu\left(\frac{\partial U_z}{\partial r}+\frac{\partial U_r}{\partial z}\right) \tag{6}$$

为便于问题的解决，取负荷

$$\tau_0(r,O,t)=-(F/2\pi r)\delta(r)H(t) \tag{7}$$

式中，$\delta(r)$和$H(t)$分别为δ函数和单位阶跃函数。

现在对（3），（4）同时作关于t的Laplace变换和r的Hankle变换，即将t和r分别变换到s域和k域，得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\left(\frac{s^2}{v_P^2}-k^2\right) \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\left(\frac{s^2}{v_S^2}-k^2\right) \tag{9}$$

式中，

$$\varphi(k,z,s)=\int_0^{i\infty}rI_0(kr)\mathrm{d}r\int_0^{i\infty}\varphi\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\ \Psi(k,z,s)=\int_0^{i\infty}rI_0(kr)\mathrm{d}r\int_0^{i\infty}\Psi\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

由问题的自然边界条件$z\to\infty$；ϕ，$\Psi\to0$，得方程（8）和（9）的解

$$\phi=Ae^{-s\eta_1 z} \tag{10}$$

$$\Psi=Be^{-s\eta_2 z} \tag{11}$$

式中，

$\eta_1=(\frac{1}{v_P^2}-\frac{k^2}{s^2})^{1/2}$；$\eta_2=(\frac{1}{v_S^2}-\frac{k^2}{s^2})^{1/2}$，且 $Re\,\eta_1>0$，$Re\,\eta_2>0$。

以下对(1)，(2)；(5)，(6)及(7)式作相应的变换，得

$$U_k=-ik\varphi-ik\frac{\partial\Psi}{\partial z} \tag{12}$$

$$U_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-k^2\Psi \tag{13}$$

$$\tau_{zk}=\mu i(-2k\frac{\partial\varphi}{\partial z}-k^3\Psi-k\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}) \tag{14}$$

$$\tau_{zz}=\lambda k^2\varphi-2\mu k^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{15}$$

$$\tau_0=-F/2\pi s \tag{16}$$

$$在z=0处，\quad \tau_{zz}=\tau_0,\quad \tau_{zk}=0 \tag{17}$$

这样，将（10）和（11）式分别代入（14）和（15）式，并引入射线参数p=k/s，得

$$A=C\frac{1/(v_S^2-2p^2)}{s^3R(p)}\qquad B=2\eta^2C/s^4R(p) \tag{18}$$

式中，$C=F/2\pi\rho v_S^2$（ρ:介质密度）；$R(p)=4p^2\eta_1\eta_2+(1/v_S^2-2p^2)^2$是Rayleigh函数。将φ， Ψ代入（12），（13）式得

$$U_p=-iAspe^{-s\eta_1 z}+iBs^2p\eta_2 e^{-s\eta_2 z}$$

（19）

$$U_z=-Aspe^{-s\eta_1 z}-Bs^2p^2\eta_2 e^{-s\eta_2 z}$$

（20）

在实际中，常常接收波动的垂直分量，在这里着重讨论波动场U_z，对U_z作k的逆Hankle变换，得

$$U_z=-\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} s^2 p\left[As\eta_1 e^{-s\eta_1 z}+Bs^2p^2e^{-s\eta_2 z}\right]K_0(spr)\mathrm{d}p$$

注意到$K_0(\xi^*)=[K_0(\xi)]^*$，上式可变为

$$U_z=-\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_{-i\infty}^{i\infty} s^2 p\left[As\eta_1 e^{-s\eta_1 z}+Bs^2p^2e^{-s\eta_2 z}\right]K_0(spr)\mathrm{d}p$$

(21)

上式被积函数的第一项，它实际对应P波项U_{Pz}。为了返回到时间域，考虑到对大宗量的ξ，有

$$K_0(\xi)=(\pi/2\xi)^{1/2}e^{-\xi}(1+O(1/\xi))$$

因此可设$\tau=pr+\eta_1 z$，这样就定义了Cagniardp=p(τ)路径，如图2。在图中第一象限内被积函数解析，故环路积分为零，即

$$\int_{p(\tau)}+\int_{C}+\int_{0}^{i\infty}=0$$

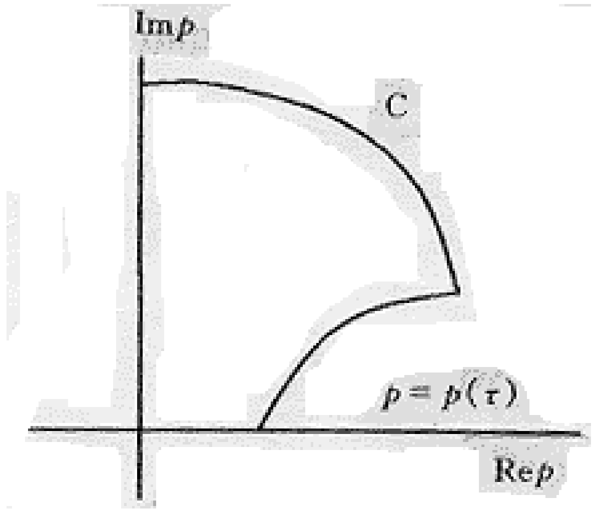


图2　复平面P

当p→∞，根据约当定理，第二项为零，所以

$$\int_0^{i\infty} = -\int_{p(\tau)}$$

这样（21）式的积分路径变为Cagniard路径p(τ)。

$$U_z^{\mathrm{P}} = -\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_{p(\tau)} As^3 p\eta_1 \mathrm{e}^{-s\eta_1 z} K_0(spr)\mathrm{d}p \tag{22}$$

根据$H(t-\alpha-\beta)$〔$(t-\beta)^2-\alpha^2$〕$^{-1/2}$的Laplace变换是$K_0(s\alpha)e^{-s\beta}$，可将U_{Pz}反演到时间域

$$U_z^{\mathrm{P}}(r,z,t) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_{p(\tau)} As^3 p\eta_1 \frac{H(t-pr-\eta_1 z)}{[(t-\eta_1 z)^2 - p^2 r^2]^{1/2}}\mathrm{d}p$$

分析上式被积函数，当$\tau < r/v_P$无实部，且当$\tau > t$时，上式为零，所以

$$U_z^{\mathrm{P}}(r,z,t) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_{r/v_{\mathrm{P}}}^{t} As^3 p\eta_1 \frac{H(t-pr-\eta_1 z)}{[(t-\eta_1 z)^2 - p^2 r^2]^{1/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

（23）

同样可得U_Z中对应的S波项

$$U_z^S(r,z,t) = -\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_{r/v_S}^{t} As^3 p\eta_1 \frac{H(t-pr-\eta_1 z)}{[(t-\eta_1 z)^2 - p^2 r^2]^{1/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau$$

（24）

将U_{Pz}和U_{Sz}相加即得总的垂直位移分量U_z。同样可得水平位移分量U_r，将（18）式的A，B代入U_z，就有了最终的在时刻t，半空间的任何一点垂直振动的精确表达式。(23)和(24)式中都有分母项R(p)，即瑞利方程，它决定了瑞利面波。

图3a是介质内部（r=10h）的垂直位移U_z，图3b是近介质表面（r=1 000h）的垂直位移U_0。可以看出，在P，S，R这3类波动中，瑞利波（R波）占绝对优势。

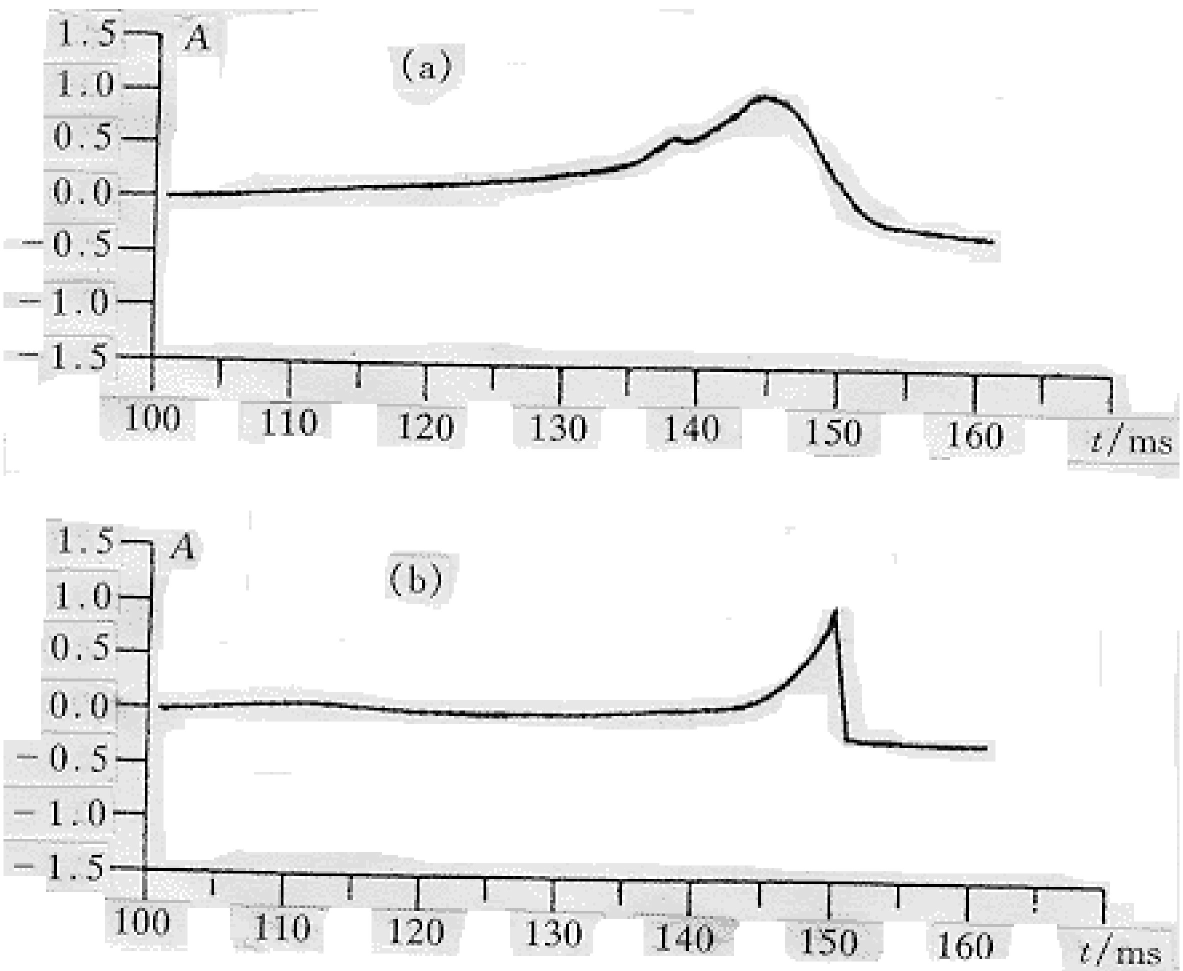


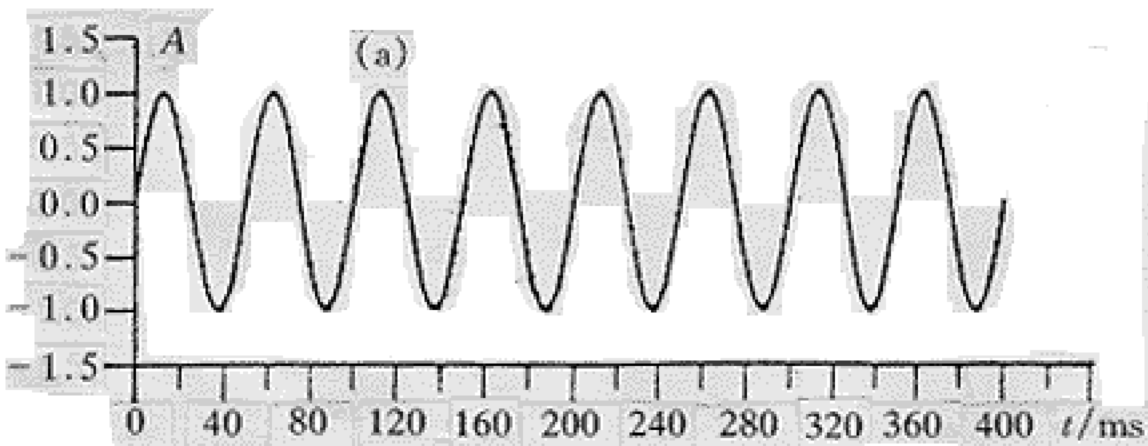
图3　点源激发的瑞利波垂直位移
a—r=10h；b—r=1 000h

2　稳态和瞬态瑞利波的波场

在以上求解的过程中，所使用的震源函数是$\tau_0(r,O,t)=-(F/2\pi r)\delta(r)H(t)$，对任意震源函数f(t)，只须将f′(t)和$U_z$进行褶积，即得到该震源激发的波动的波场，这一点不难证明，也可从推导U_z的过程中看出。

2.1　稳态瑞利波的波场

对稳态震源，取源函数f(t)=sin(·),·=40π,如图4a。将f′(t)与U_z褶积可得一定偏移距上的振动图(图4b)。可见在开始（60 ms）有P波的扰动，接着是S波，强大的瑞利波到达后，振动图和震源一致了。



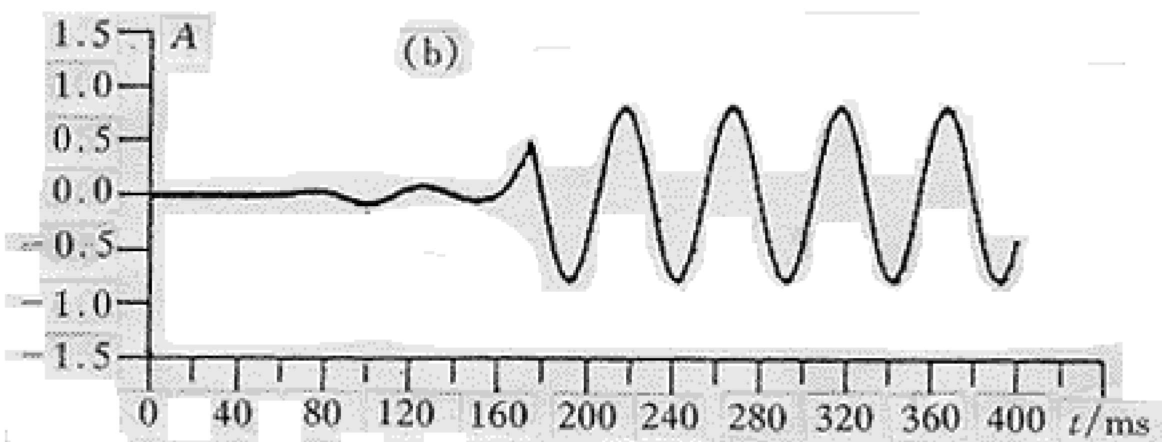
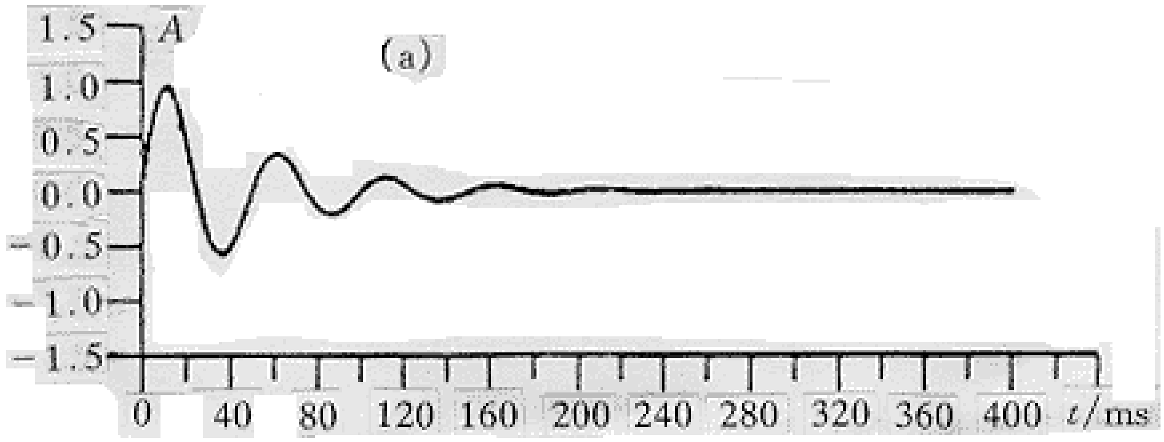


图4　稳态瑞利波的波场
a—稳态震源；b—在一定偏移距上的波动图

2.2　瞬态瑞利波的波场

对瞬态震源，取源函数为$f(t)=e^{-200t}\sin(\cdot t), \cdot=40\pi$，如图5a。同样将f(t)的一阶导数与$U_z$褶积得到如图5b所示的振动图，由图可看出振动基本上被瑞利波所统治。



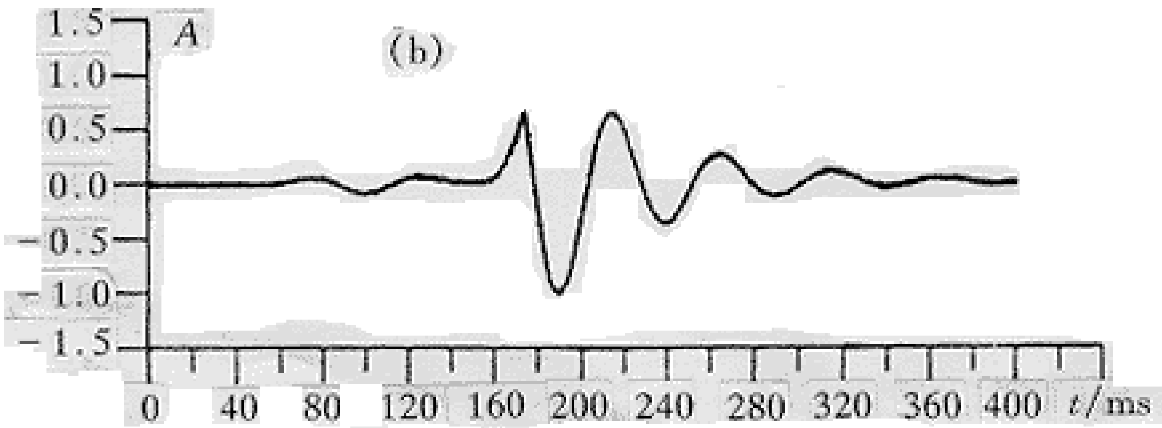


图5　瞬态瑞利波的波场
a—瞬态震源；b—在一定偏移距上的波动图

3　结语

以上用改进的Cagniard-Dehoop方法求解了弹性半空间表面点源激发波场的任意点位移，也可尝试用此方法解决其它一些（Lamb）问题，从而得到半空间表面及内部波场，以进一步对不同点的位移进行对比研究。文中模拟稳态和瞬态震源激发的波动图之目的是为了从理论上加深对瑞利波的认识。这对近几年兴起的瑞利波勘探方法的发展也有积极意义。

作者简介：赵东，男，安徽安庆人，生于1969年11月，长春地质学院地球物理系毕业，硕士研究生，工程师，一直从事瑞利波提取和瑞利波正反演研究。

发表《瑞利波反演的BG方法》、《瑞利波勘探：应用、现状和问题》、《用遗传算法进行瑞利波反演》、《地震层析成像的BG方法初步研究》等论文。

作者单位：北京市勘察设计研究院，北京 100038 中国地质勘查技术院，北京 100083

4 参考文献

[1]安艺敬一，理查兹P.G著.李钦祖，邹其嘉，等译.定量地震学——理论和方法.北京：地震出版社，1986

[2]何樵登.地震波理论.北京：地质出版社，1988

[3]冯德益.地震波理论及应用.北京：地震出版社，1988

1998年6月15日收稿，同年8月13日收修改稿。