

小波阈值去噪黄金分割法

谢 攀 , 詹 毅 , 牛 聪
(成都理工大学 , 四川 成都 610059)

摘 要 : 在小波去噪的方法中 , 应用最广泛的是 Donoho 阈值法 , 但由于其阈值的单一性 , 使它不能在每级尺度上将信号与噪声做最大分离 , 去噪效果并不理想。通过分析 Donoho 硬阈值和软阈值方法的特点 , 提出了一种黄金分割法 , 这种方法结合了硬阈值和软阈值方法各自的优点。仿真去噪结果表明 , 这种改进的小波阈值方法能够得到更好的去噪效果 , 信号的信噪比得到了进一步提高。
关键词 : 小波阈值去噪 ; 硬阈值 ; 软阈值 ; 黄金分割法
中图分类号 : P631 文献标识码 : A 文章编号 : 1000 - 8918(2006)03 - 0254 - 04

在科学研究及实际应用中 , 对信号进行分析处理时 , 首先要对分析的信号进行预处理 , 最重要的就是要消除信号的噪声。传统的方法是利用傅里叶变换 , 将含噪信号变换到频域 , 然后进行滤波去噪。这种方法对于信号和噪声的频带相互分离比较有效 , 但当信号和噪声的频带相互重叠时(如当信号中混有白噪声) 效果则较差。小波变换是近 10 年来发展起来的一种新的信号处理工具 , 由于其特有的多分辨率分析技术 , 使它在信号去噪方面表现出明显优势。在众多的小波去噪方法中 , Donoho 的阈值法(硬阈值和软阈值) 由于处理方法简单、计算量小而得到广泛的应用。然而 , 在硬阈值处理过程中 , 得到的估计小波系数值连续性差 , 可能引起重构信号的振荡 , 而软阈值方法处理之后 , 估计小波系数值虽然连续性好 , 易于处理 , 但当小波系数较大时会给重构信号带来很大的误差。基于此 , 笔者结合硬阈值和软阈值方法各自的特点 , 提出了黄金分割阈值去噪方法 , 并将此法在计算机上进行仿真去噪 , 发现这种改进的小波阈值方法比单一的阈值法有更好的去噪效果。

1 小波变换基础

把对信号 $f(t)$ 的积分变换

$$W_f(a,\tau)=\int_R f(t)\bar{\psi}_{a,\tau}(t)dt=f\psi_{a,\tau}(t) \tag{1}$$

称为连续小波变换^[1-2] , 其中

$$\psi_{a,\tau}=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-\tau}{a})$$

称为小波基函数 , 显然 , 它们是由同一母函数 $\psi(t)$

经伸缩和平移后得到的一组函数序列。当 $\psi(t)$ 满足

$$\int_R \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|}dw<\infty$$

条件时 , 称其为允许小波函数或者基小波 , 其中 $\hat{\psi}(w)$ 是 $\psi(t)$ 的傅立叶变换。

对于离散的情况 , 定义离散小波函数(其实为二进小波)

$$\psi_{j,k}=2^{-j/2}\psi(2^{-j}t-k), \quad j,k\in Z,$$

那么信号 $f(t)$ 的离散小波变换就定义为

$$D[W_f(j,k)]=2^{-j/2}\int_R f(t)\bar{\psi}(2^{-j}t-k)dt. \tag{2}$$

由小波变换的多分辨率分析(MRA)^[3] 以及 Mallat 算法可以得知 , 当信号 $f(t)$ 被展开为小波级数后 , 其细节信号的性态可由小波系数 $d_{j,k}$ 来描述 , 而 $d_{j,k}$ 可以通过式 (2) 计算离散小波变换 $D[W_f(j,k)]$ 的方式求得。在求得尺度系数后 , 就可以方便地利用 Mallat 重构算法重构出原信号 , 这也是信号去噪的理论基础。

2 Donoho 阈值去噪原理及缺点

设有如下观测信号

$$f(t)=s(t)+n(t)$$

其中 $s(t)$ 为原始信号 , $n(t)$ 为方差是 σ^2 的高斯白噪声 , 服从 $N(0,\sigma^2)$ 。首先对其进行离散采样 , 得到 N 点离散信号 $f(n)$, $n=0,1,\dots,N-1$, 其小波变换为

$$W_f(j,k)=2^{-j/2}\sum_{n=0}^{N-1}f(n)\bar{\psi}(2^{-j}n-k). \tag{3}$$

但在实际中,常采用 Mallat 算法^[4]来实现小波变换,借助双尺度方程,可以得到小波变换的递归方法

$$S_f(j+1,k)=S_f(j,k)*h(j,k), \quad (4)$$

$$W_f(j+1,k)=S_f(j,k)*g(j,k)。 \quad (5)$$

其中 h 和 g 分别是对应于尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\psi(x)$ 的低通和高通分解滤波器, $S_f(j,k)$ 为尺度系数, $W_f(j,k)$ 为小波系数。相应地,小波变换重构公式为

$$S_f(j-1,k)=S_f(j,k)*\tilde{h}(j,k)+W_f(j,k)*\tilde{g}(j,k)。 \quad (6)$$

$\tilde{h}(j,k)$ 、 $\tilde{g}(j,k)$ 为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的低通和高通重构滤波器。为方便起见, $W_f(j,k)$ 简记为 $w_{j,k}$ 。对观测信号 $f(k)=s(k)+n(k)$ 作离散小波变换后,由小波变换的线性性质可知,分解得到的小波系数 $w_{j,k}$ 仍然由 2 部分组成,一部分是 $s(k)$ 对应的小波系数 $u_{j,k}$,另一部分是 $n(k)$ 对应的小波系数 $v_{j,k}$ 。

小波阈值去噪的基本方法^[1]如下:

(1)先对含噪信号 $f(k)$ 作小波变换,得到一组小波系数 $w_{j,k}$;

(2)通过对 $w_{j,k}$ 进行阈值处理,得出估计小波系数 $\hat{w}_{j,k}$,使得 $\|\hat{w}_{j,k}-w_{j,k}\|$ 尽可能小;

(3)利用 $\hat{w}_{j,k}$ 进行小波重构,得到估计信号 $\hat{f}(k)$,即为去噪之后的信号。

在此基础上,Donoho 提出了一种简洁的去噪算法,即所谓硬阈值和软阈值去噪方法^[5],它们的定义是:取 $\lambda=\sigma\sqrt{2\lg N}$ (σ^2 为噪声方差, N 为离散采样信号的长度),硬阈值估计方法定义为

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}|\geq\lambda; \\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda. \end{cases} \quad (7)$$

软阈值估计方法定义为

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases} \operatorname{sgn}[w_{j,k}\cdot(|w_{j,k}|)]\cdot(|w_{j,k}|-\alpha), & |w_{j,k}|\geq\lambda; \\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda. \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\operatorname{sgn}[\cdot]$ 为符号函数,当其数值大于零,符号为正,反之则为负。

硬阈值和软阈值方法虽然在实际中得到了广泛的应用,也取得了较好的效果,但是方法本身还是有一些潜在的缺点。如图 1a 所示的硬阈值方法中, $\hat{w}_{j,k}$ 在 λ 处是不连续的,利用 $\hat{w}_{j,k}$ 重构所得的信号可能会产生一些振荡;如图 1b 所示的软阈值方法中,虽然 $\hat{w}_{j,k}$ 整体上连续性较好,但是当 $|w_{j,k}|>\lambda$ 时, $\hat{w}_{j,k}$ 与 $w_{j,k}$ 总存在着恒定的偏差,直接影响着重构信号与真实信号的逼近程度。鉴于以上原因,单一地采用硬阈值或软阈值方法,去噪的效果显然

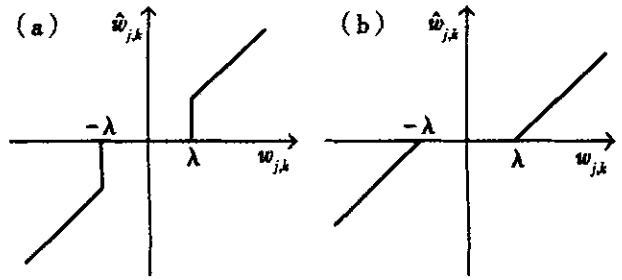


图 1 硬阈值(a)和软阈值(b)方法

不理想。

3 黄金分割去噪法

考虑到单纯采用硬阈值或软阈值方法会影响信号的去噪效果,所以在阈值去噪的时候,必须综合考虑硬阈值和软阈值。目前,已经有一些比较成熟可行的方法,如多项式插值法、模平方处理法等,它们都能综合考虑硬阈值或软阈值方法,去噪效果较理想。在这里,笔者给出一种处理简便、去噪效果理想的黄金分割法。

从前面的分析可知,单纯的软阈值方法估计出来的 $\hat{w}_{j,k}$ 其绝对值总比 $w_{j,k}$ 要小 λ ($w_{j,k}>\lambda$ 时),因此要设法减小此偏差;但是,若把这种偏差减小为零,就成硬阈值情况了,这也未必是最好的。因为 $w_{j,k}$ 本身就是由 $u_{j,k}$ 和 $v_{j,k}$ 组成的,它可能受 $v_{j,k}$ 的影响而使 $|w_{j,k}|>|u_{j,k}|$,而我们的目的是使 $\|\hat{w}_{j,k}-u_{j,k}\|$ 最小。因此,如果令 $|\hat{w}_{j,k}|$ 的取值介于 $|w_{j,k}|-\lambda$ 和 $|w_{j,k}|$ 之间,就会使估计出来的小波系数 $\hat{w}_{j,k}$ 更加接近于 $u_{j,k}$ 。基于这一思想,给出估计因子 α ,综合硬阈值或软阈值方法的表达式,给出如下表达式

$$\hat{w}_{j,k}=\begin{cases} \operatorname{sgn}[w_{j,k}\cdot(|w_{j,k}|-\alpha\lambda)], & |w_{j,k}|\geq\lambda, \\ 0, & |w_{j,k}|<\lambda; \end{cases} \quad 0\leq\alpha\leq1。 \quad (9)$$

很显然,当 α 分别取 0 和 1 时,上式即成为硬阈值和软阈值估计方法。

现在问题的关键就在于 α 取何值合适。众所

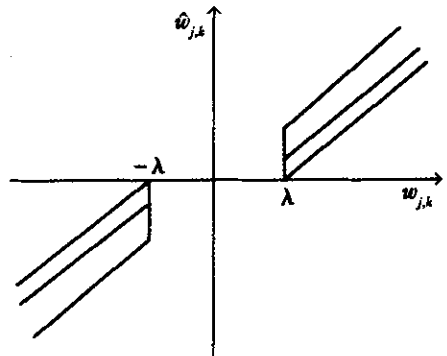


图 2 黄金分割法

周知,数学上有一个黄金分割点——0.618。用此比例数分割是最具美感的,从身体比例到高楼建筑,从艺术到绘画无不出其之左,因此被称为“神奇的”黄金分割点。与此同时,人们也对其进行了大量的研究,研究结果更有大量的“神奇”说法。因此,考虑到数学和工程上的这种说法,取 $\alpha = 0.618$,由此对应于式(9)的阈值去噪方法被称为黄金分割法(图2),这是一种综合硬阈值和软阈值的去噪方法,通过大量的仿真实验,发现这种去噪方法可以获得更好的去噪效果,且处理起来简便。

4 仿真去噪效果对比

为了说明黄金分割去噪方法的优越性,对一段含噪的 blocks 信号分别进行了硬阈值、软阈值和黄金分割去噪实验,结果如图3所示。其中,给定含噪信号的信噪比(SNR)为6。通过图3,可以清楚地看出,3种去噪方法基本上都能重构出原信号,但是硬阈值去噪后的信号明显出现了不连续的情况(图3c),而软阈值去噪后的信号(图3d)虽然有较好的连续性,但出现了一定的误差,且2种方法重构出的

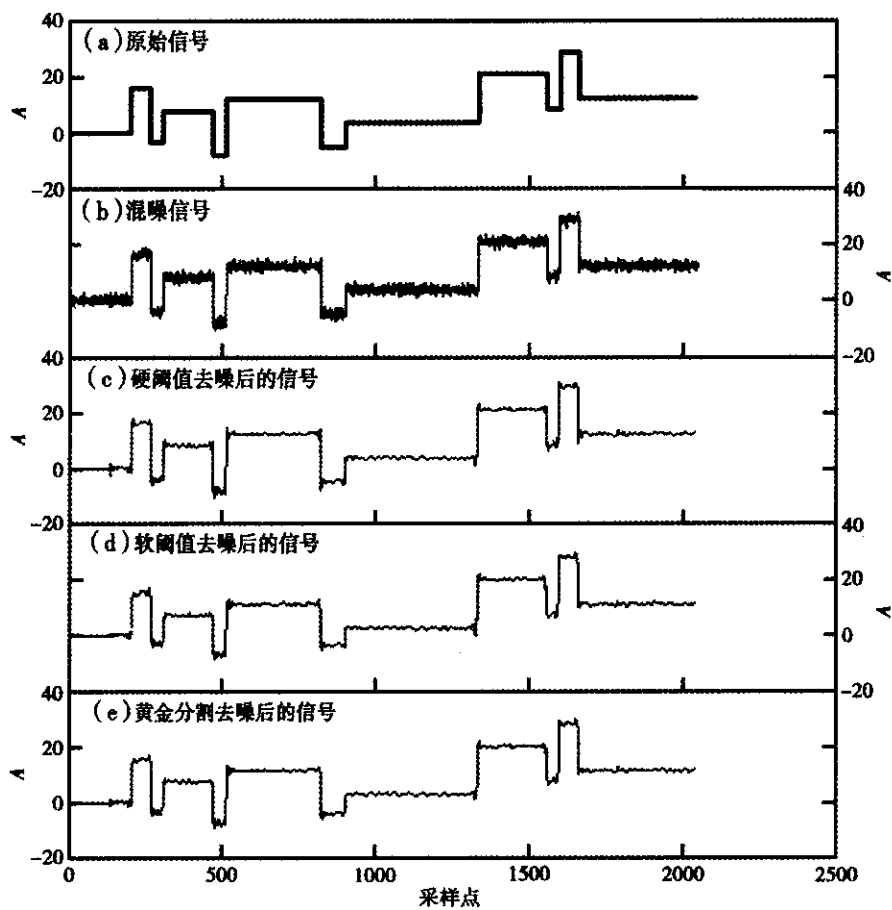


图3 3种方法的信号去噪结果比较

信号的信噪比(SNR)和相对均方误差(RMSE)都没有黄金分割法理想,这一点可以通过表1看出。

表1 3种阈值去噪法的信噪比和相对均方误差比较

估计器	硬阈值法	软阈值法	黄金分割法
SNR	28.2593	29.4472	30.3277
RMSE	0.1307	0.1275	0.1123

5 结束语

笔者提出了一种新的黄金分割阈值去噪法,与传统的硬、软阈值方法相比,去噪效果无论在视觉上还是在去噪后信号的信噪比和均方误差意义上都有了明显改善,比单一的硬、软阈值方法要好。

在大量的仿真实验中发现,阈值 λ 的取法并不是最优的,有时候 λ 取得恰当,Donoho阈值去噪的效果会更好。单纯的硬阈值和软阈值方法稳定性较差,对阈值 λ 的依赖性较强,而且对于给定的阈值 λ ,硬阈值和软阈值方法中至少有一个效果不理想。而对于黄金分割法,则无论阈值 λ 如何选择,它的去噪效果总是优于单纯的硬阈值和软阈值方法,而且处理简单方便,具有广阔的应用前景。

参考文献:

[1] 成礼智,王红霞,罗永.小波的理论与应用[M].北京:科学出版社,2004.

[2] 李世雄. 小波变换及其应用[M]. 北京 :高等教育出版社 , 1997.

[3] 梁学章 ,何甲兴. 小波分析[M]. 北京 :国防工业出版社 2004.

[4] 李建平 ,唐远炎. 小波分析方法的应用[M]. 重庆 :重庆大学出版社 ,1999.

[5] Donoho D. De-noising by soft-Thresholding[J]. IEEE Trans On IT ,1995(3) 613.

[6] 谭毅华 ,田金文 ,柳健. 基于小波局部统计特性的图像去噪方法[J]. 信号处理 2005 21(3) 296.

THE GOLDEN SECTION METHOD IN WAVELET THRESHOLD DENOISING

XIE Qian ZHAN Yi ,NIU Cong
(Chengdu University of Technology , Chengdu 610059 , China)

Abstract :Among the denoising methods , Donoho’s threshold method is most widely applied. Due to its single threshold value ,however , it cannot separate signal from noise completely at each step of scale and hence its denoising effect is not satisfactory. By comparatively analyzing Donoho’s hard threshold and soft threshold method ,this paper puts forwards a golden section method , which combines the advantages of both methods. The simulation denoising result shows that better denoising effect can be achieved by this modified wavelet threshold method , and the signal-to-noise ratio can be improved.

Key words :wavelet threshold denoising ; hard threshold ; soft threshold ; golden section method

作者简介 :谢攀(1981 -) ,男 ,成都理工大学信息工程学院信号与信息处理专业硕士研究生。主要研究方向 :信号处理、小波变换等。

上接 253 页

THE ALGORITHM AND APPLICATION OF THE COHERENCY/VARIANCE CUBE TECHNIQUE

CHEN Feng-yun , HANG Yuan ,KANG Jian-lin
(China University of Mining and Technology , Xuzhou 221008 , China)

Abstract :The coherency/variance cube technique has been developed in recent years as a new technique of seismic data interpretation. In this paper ,C3 coherency and variance cube algorithms are emphatically discussed. The authors have designed a software for processing seismic data in the coherency/variance cube technique. Using time slice and leveled layer slice , we can explore small faults and analyze geological structures through investigating the similarity of seismic signals between adjacent traces on the seismic cube. An analysis and interpretation of practical data show that the coherency/variance cube technique is very effective in fault interpretation in that it can improve the interpretation precision and shorten the exploration period.

Key words :seismic data processing ;coherency/variance algorithm ;time slice ;leveled layer slice ; fault recognition

作者简介 :陈凤云(1980 -) ,女 ,汉族 ,山东省高唐县人 ,江苏省徐州市中国矿业大学教师 ,研究方向为地球探测与信息技术 ,公开发表学术论文数篇。