

面波频散反演地下层状结构的拟牛顿法

凡友华^{1,2}, 刘雪峰², 陈晓非¹

(1. 哈尔滨工业大学 深圳研究生院, 广东 深圳 518055; 2. 北京大学 地球与空间科学学院 地球物理学系, 北京 100871)

摘要: 由于地下层状结构与面波频散曲线之间是一种高度非线性关系, 所以面波频散曲线的反演方法应该采用非线性的反演方法。笔者将目前在最优化问题中得到广泛应用的拟牛顿法应用到瑞利面波频散曲线的基阶模反演当中, 取得了很好的效果, 并通过实例验证了方法的可行性。

关键词: Rayleigh 波, 频散, 反演, 拟牛顿法, 层状结构

中图分类号: P631.4

文献标识码: A

文章编号: 1000-8918(2006)05-0456-04

面波频散曲线含有丰富的地下层状结构信息, 对地下横波速度结构特别敏感。通过对频散曲线的反演可以得到地下层状介质的物理性质。目前瑞利波频散曲线计算的研究已经日趋完善^[1-2, 4-9]。笔者将最优化方法中广泛使用的拟牛顿法^[3]引入到频散曲线的反演当中, 提出了基于基阶模的拟牛顿法反演, 在理论上进行了反演模拟。对于实测信号, 提出实际应用中手工给出反演初值再用拟牛顿法进行反演拟合, 通过反演结果和实际场地的单孔横波速度测试结果对比可以看出, 拟牛顿法完全可以胜任瑞利波频散曲线的反演。

1 频散曲线反演的拟牛顿法

对于提出的频散曲线, 基于其正演算法, 通过某种方式调节模型参数达到对实际提取的频散曲线的最好拟合, 这就是频散曲线的反演问题。反演过程大致可以表述为如下的形式: 设观测数据为 d , 而 d 的正演公式为 $\bar{d}(m)$, 其中 m 为模型参数, 定义目标函数为

$$\Phi(m) = \|d - \bar{d}(m)\|_2^2, \quad (1)$$

目标函数的意义相当于用给定的模型计算的理论观测数据 $\bar{d}(m)$ 对观测数据 d 的拟合程度, 反演的过程实际上就是采用某种方式搜索 m , 使得目标函数 $\Phi(m)$ 为极小的过程, 若 m 有多个, 则取其目标函数最小的那一个作为反演的结果。

经过对大量的反演算法(或搜索方式)的应用, 发现用目前在解决最优化问题中比较有效的 BFGS 拟牛顿法^[3]对频散曲线进行反演是可行的,

下面给出此算法的简要说明。

设目标函数为 $F(x)$, 令其二次可导, 则 $F(x)$ 的二次近似为

$$F(x) \approx F(x_{k+1}) + g_{k+1}^T(x - x_{k+1}) + \frac{(x - x_{k+1})G_{k+1}(x - x_{k+1})}{2}, \quad (2)$$

令 $x = x_k$, $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = g_{k+1} - g_k$, 对式(2)两边求导的得到

$$s_k \approx G_{k+1}^{-1}y_k. \quad (3)$$

式(3)即为牛顿法搜索目标函数极小值点 x^* 的主要思想, 其中 G 矩阵称为 Hesse 矩阵。由于 Hesse 矩阵的逆的计算量很大, 牛顿法进一步发展成为了拟牛顿法, 拟牛顿法的思想则是直接构造 Hesse 矩阵的逆, 即采用某种方式构造出矩阵 H , 使得 H 近似认为是 G^{-1} , 并满足关系

$$s_k = H_{k+1}y_k. \quad (4)$$

目前构造 H 的方法最为成功的是 BFGS 方法, 它给出的 H_{k+1} 的迭代关系为

$$H_{k+1} = (I - \frac{s_k y_k^T}{s_k^T y_k})H(I - \frac{y_k s_k^T}{s_k^T y_k}) + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}. \quad (5)$$

以上即为 BFGS 拟牛顿法索目标函数极小值点 x^* 的主要思想。拟牛顿法的主要步骤为:

①令 $d_k = -H_k g_k$ (H_0 设为单位矩阵 I); ②沿方向 d_k 做线性搜索, 得到 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ ($\alpha_k > 0$ 为一待求系数, 它原则上要求下一步的目标函数 $f(x_{k+1})$ 极小); ③由 $f(x)$ 和式(5)给出 H_{k+1} ; ④当迭代若干次后(设 $n+1$ 次), 目标函数的改变量 $\Delta f_n = |f_{n+1} - f_n|$ 和模型参数的改变量 $\Delta x_n = |x_{n+1} - x_n|$ 小

于某个小数量级正数 ε 停止迭代, x_{k+1} 即为搜索结果。

下面介绍 BFGS 拟牛顿法应用于频散曲线的反演过程。首先, 给定初始模型 x_0 , 初始模型的选取可根据频散曲线的提取结果按半波长理论给定, 并假定地下介质泊松比 σ 恒定(这里取为 0.385)按公式 $v_p = v_s(2(1 - \sigma)/(1 + \sigma))^{1/2}$ 给出各层的纵波速度 v_p , 由于介质的密度对频散曲线的影响不大, 而且频散曲线只与各层介质密度的相对大小有关, 故不在考虑之列。然后, 根据正演公式计算 x_0 对应的理论观测频散曲线与实测频散曲线比较, 求出目标函数 $f(x_0)$ 和其导数 g_0 , 再按 BFGS 拟牛顿法进行迭代, 搜索目标函数极小值对应的模型 x_n 。

2 基于基阶模的反演

2.1 基阶模的正演和反演模拟

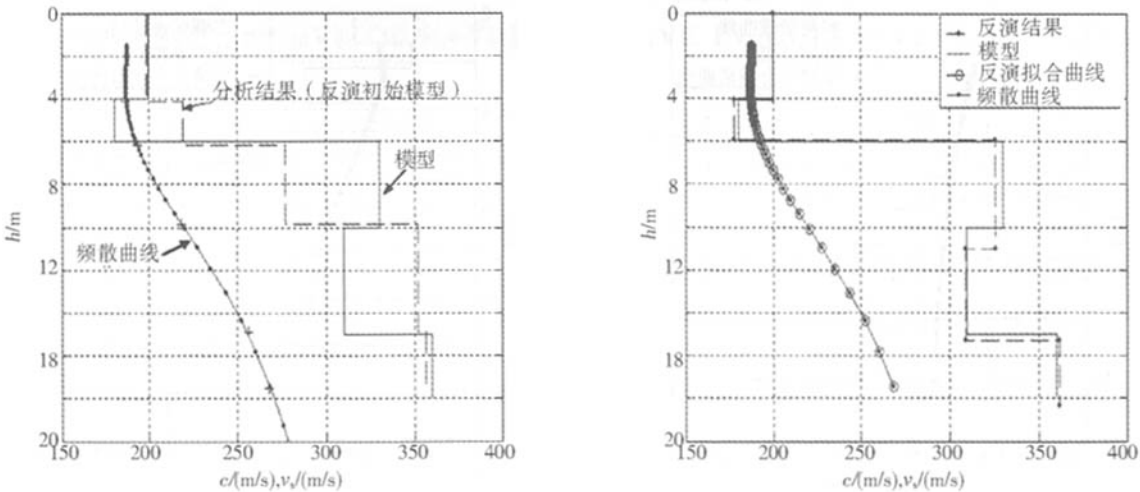
考虑一下频散方程 $D(c, k) = 0$ 的根, 对于同一波数 k 或者转化一下, 对于同一频率 f 往往存在许多个相速度 c 满足频散方程, 也就是说瑞利波往往存在多个模式, 将它们按相速度大小排列, 并设其中第 j 个模式为 $c_j(f)$, 当然 $c_j(f)$ 也可以转化为 $c_j(k)$ 、 $k_j(f)$ 等形式, 这里称相速度最小的那个模式, 即 $c_1(f)$ 、 $c_1(k)$ 、 $k_1(f)$ 等, 为基阶模。

实际上关于基阶模的正演目前还没有单独的公式, 因为频散方程 $D(c, k) = 0$ 实际上确定的是多个隐函数 $c_j(f)$, 代表的分别是瑞利波的多个模式, 而目前的研究还不能将 $c_j(f)$ 从频散方程中分离出各自独立的方程或表达式来, 即基阶模 $c_1(f)$ 没有独立的表达式。但数值上求解频散方程式时若求根初值或者求根范围给定合适的话, 则可以很快地求出基阶模来。理论分析得出在高频下基阶模趋向于第一

层介质的瑞利波速度或低速层的横波速度, 所以数值求解基阶模相速度时, 可以从高频开始, 将第一层瑞利波速度和低速层横波速度的最小值作为搜根初始值, 将求根结果作为在下一个频率点求根的初始值。一般情况下, 这种求基阶模的方法还是很稳定的, 而且速度很快。

为了验证基阶模反演地下层状结构的能力, 笔者在理论上进行了反演模拟, 即先给出一些模型, 计算出其基阶模频散曲线, 并假定其为实际观测的频散曲线, 用拟牛顿法方法进行反演拟合, 看反演结果与给定的模型相差多少。由此在一定程度上可以验证基阶模反演方案的可行性。下面以模型 1 为例, 说明基阶模频散曲线的反演模拟过程。首先, 根据模型计算出 h - c 坐标下的基阶模频散曲线, 假定其为观测的频散曲线, 按半波长理论给出反演初始模型(即先找出分层点, 认为各点的基阶模相速度值是对应深度 h 以上介质的平均瑞利波速度 $\bar{v}_R$, 以此从上而下算出各层的瑞利波速度 v_R , 根据 $v_R \approx 0.94v_s$ 算出各层的横波速度 v_s , 图 1a), 然后根据初始模型基于基阶模的正演算法(而不是以上半波长理论算法)利用拟牛顿法对频散曲线进行反演拟合得出地下横波的速度结构(图 1b)。另外, 用此方法对模型 2 也进行了反演模拟(图 2)。其中图 1b 是反演 40 步的结果, 图 2b 则是反演 100 步的结果。

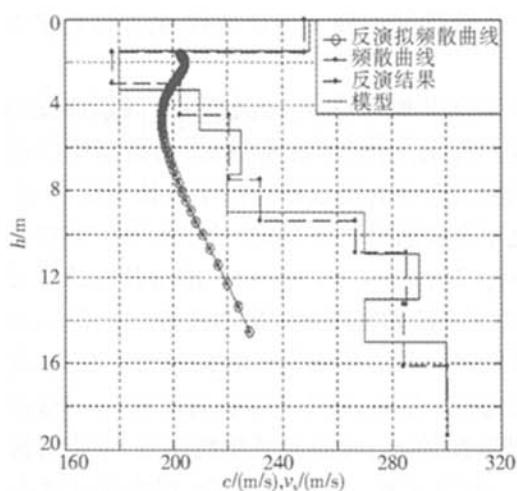
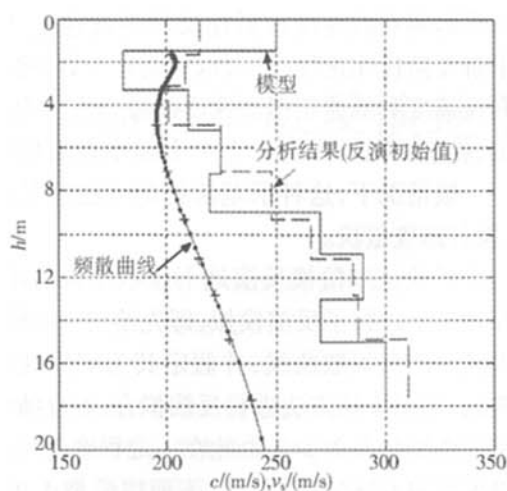
研究表明, 越靠近地面, 横波速度结构反演的精度越高, 例如图 1 和图 2 中的第一、二层反演的效果都很好, 而且第二层是低速层, 也能很好的反演出来, 最后一层即半空间的横波速度也反演得很好。另外, 反演得拟合度很高, 如果还想提高精度的话, 就要再增加反演步数, 或结合手工调节介质参数反演, 但这时反演精度提高的速度会越来越慢, 但是总



a—半波长理论分析结果(“+”分层点) b—反演结果

图 1 模型 1 的基阶模频散曲线的反演模拟

万方数据



a—半波长理论分析结果(“+”分层点) b—反演结果

图2 模型2的基阶模频散曲线的反演模拟

是可以提高的。从图可以看出,层数越多,地下结构越复杂,反演的难度越大。

总之,用基阶模反演地下层状结构在理论上是可行的,缺点是由于没有把高阶模信息考虑进来,反演的精度不是特别高。

2.2 基阶模频散曲线的反演

前面的基阶模反演模拟说明了利用基阶模进行地下层状结构的反演是可行的。下面针对实际问题,对实际提取的基阶模频散曲线进行反演研究。对于实测基阶模频散曲线的反演,总体上和反演模拟的过程是一样的,只不过此时的观测频散曲线不是由给定模型理论计算出来的,而是对实测信号进行处理得到的。

首先,可以根据实际场地情况对反演模型参数调整给予一定的范围限制。另外由于在低频时基阶模相速度随频率变化较剧烈一些,而基阶模的正演数值计算是用前一频率点的相速度值作为搜索后一

频率点的相速度值的初值,当频率采样点给的不是很密时,在低频时该初值变得不可靠。所以对于频率采样点不够密集的情况,为确保反演的顺利进行,要对提取的频散曲线在低频部分进行加密插值处理。而由于提取的基阶模频散曲线在低频处的可信程度不高,在反演中它对于目标函数的贡献应该加以削弱。图3是分别对实测信号 lig5004 和 lig6001 进行反演处理的结果。

以上例子的反演步数均为50步,若增加步数的话,曲线的拟合度还会继续提高,但提高的速度会越来越慢。通过大量的反演试验,发现,越往下,介质的横波速度对于频散曲线的敏感度越小,而越靠近地面,横波速度对频散曲线的敏感度越高,半空间的横波速度对于频散曲线的敏感度也很高。另外,还发现初始分层对反演结果也有一定的影响,不同的初始模型可能反演出不同的结果来,但是把多次的反演结果进行比较发现,它们反映地下横波速度结

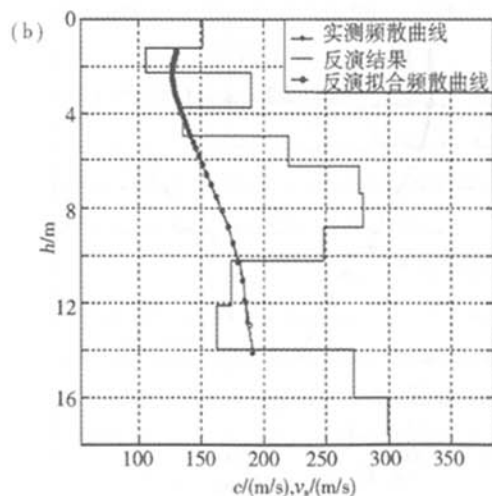
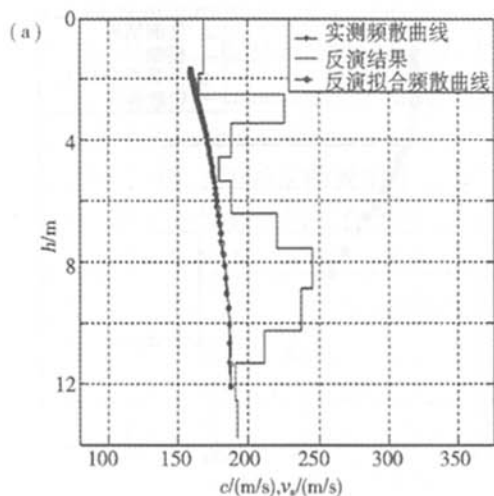


图3 lig5004(a)和 lig6001(b)的基阶模反演结果

大致形状还是很相近的。lig6001 和 lig5004 是场地加固前后的实测信号 ,通过反演结果比较 ,发现加固后波速明显增大。

为了进一步验证基阶模反演地下层状结构的有效性 ,将实测信号 xsk101 的基阶模反演结果与对应场地的单孔波速测试结果进行了比较 ,发现 2 种方法测试的结果大致是吻合的 ,特别是浅部波速吻合得很好(图 4)。

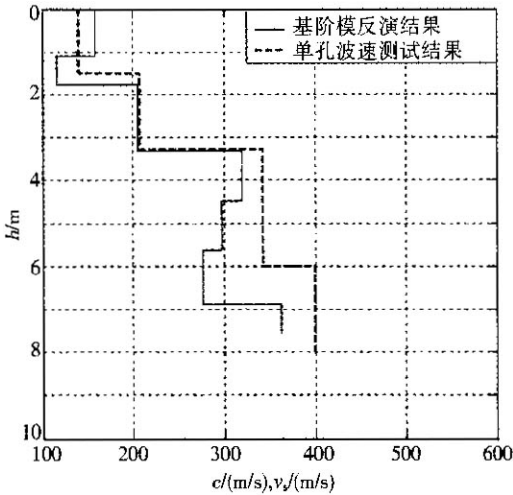


图 4 xsk101 基阶模反演与单孔钻探测试结果比较

在实际应用中可以根据提取的频散曲线先用手拟合出相近的模型 ,再利用拟牛顿法进行自动反演 ,效果会更好。对于实际问题 ,利用基阶模进行地下层状结构的反演上是可行的 ,它的优点是每一步反演都是收敛的 ,如果场地均匀性较好 ,实测的数据也比较准确 ,反演的效果会更理想。

3 结论

通过理论分析表明基阶模反演是可行的 ,并发现基阶模对于浅部各层的反演精度比较高 ,地下结构越复杂 ,反演的难度将越大。对于实测信号 ,基于拟牛顿法 ,成功地实现了实测基阶模频散曲线的自动反演。反演过程及结果说明基阶模反演在大多数情况下能够较好地解决实际问题 ,它的优点是每一步反演都是收敛的 ,如果场地均匀性较好 ,实测的数据也比较准确 ,反演的效果会更理想。这种方法在工程中 ,如在地基检测方面 ,有一定实用价值。

参考文献 :

[1] Chen ,X F. A systematic and efficient method of computing normal modes for multilayered half-space[J] Geophys J Int ,1993 ,115 :391.
[2] 凡友华 ,刘家琦. 层状介质中瑞利面波的频散研究[J]. 哈尔滨工业大学学报 ,2001 (4) :577.
[3] 袁亚湘 ,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京 :科学出版社 ,1997.
[4] Haskell N A. The dispersion of surface waves on multilayered media[J]. Bull Seism Soc Am ,1953 ,43 :17.
[5] Knopoff L A. Matrix Method for Elastic Wave Problems[J]. Bull Seism Soc Am ,1964 ,54 :431.
[6] Abo-Zena A. Dispersion Function Computations for Unlimited Frequency Values[J]. Geophys. J. R. Astr. Soc ,1979 ,58 :91.
[7] William Menke. Comment on Dispersion Function Computations for Unlimited Frequency Values by Anas Abo-Zena[J]. Geophys J R Astr Soc ,1979 ,95 :315.
[8] Kennett B L N. Reflection Rays and Reverberations[J]. Bull Seism Soc Am ,1974 ,64 :1685.
[9] Kennett B L N ,Kerry N J. Seismic Waves in a Stratified Halfspace [J]. Geophys J R Astr Soc ,1979 ,57 :557.

THE QUASI NEWTON METHOD IN THE INVERSION OF THE DISPERSION CURVE OF RAYLEIGH WAVE IN MULTILAYERED MEDIA

FAN You-hua^{1 2} ,LIU Xue-feng² ,CHEN Xiao-fei¹

(1. Shenzhen Graduate School of Harbin Institute of Technology ,Shenzhen 518055 ,China ;2. Department of Geophysics ,School of Earth and Space Sciences ,Peking University ,Beijing ,100871 ,China)

Abstract : The relationship between the dispersion curve of Rayleigh wave and the structure of multilayered media is nonlinear ,so the inversion method of the dispersion curve should be nonlinear. In this paper the authors applied the Quasi-Newton method to the inversion of the fundamental mode ,with good effects obtained. With a practical example ,the method was verified.

Key words : Rayleigh wave ,Dispersion ,Inversion ,quasi Newton method ,multilayered media

作者简介 :凡友华(1975 -) 男 ,哈尔滨工业大学深圳研究生院副教授 ,2001 年在哈尔滨工业大学获得一般力学与力学基础博士学位 ,2001 年 7 月到 2003 年 6 月在北京大学地球物理学系做博士后研究 ,2003 年 9 月至今在哈尔滨工业大学深圳研究生院任教 ,主要从事面波理论及反问题研究 ,公开发表学术论文数篇。