

Mises 屈服准则及其在钻探工具强度设计中的应用

肖京, 卜长根

(中国地质大学(北京)工程技术学院, 北京 100083)

摘要:在地质钻探工具设计和使用过程中,需要用到强度理论或屈服准则对遇到的钻采设备、工具失效等问题进行分析。为帮助人们对 Mises 屈服准则(应力)的理解,从理论上阐述了 Mises 屈服准则与畸变能密度理论的关系,其实质就是第四强度理论。在弹塑性范围内,Mises 屈服准则统一了单向拉压状态的第一强度理论、复杂应力状态的第三强度理论和第四强度理论。Mises 屈服准则在有限元数值分析中获得了更为广泛的应用。

关键词:Mises 屈服准则;强度理论;畸变能密度;钻探工具

中图分类号:P634;O346 **文献标识码:**A **文章编号:**1672-7428(2016)11-0067-03

Application of Mises Yield Criterion in the Strength Design for Drilling Tools/XIAO Jing, BU Chang-gen (School of Engineering and Technology, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract: In the process of designing and using the geological drilling tools, strength theory or yield criterion is required to analyze drilling equipment and tool failure problems. In order to help people understand Mises yield criterion (stress), this paper introduces theoretically the relationship between the Mises yield criterion and the distortional strain energy density criterion, it is revealed that the essence of Mises yield criterion is the fourth strength theory. In the elasto-plastic range, Mises yield criterion unifies the first strength theory of the single tension or compression state, the third and fourth strength theory of complex stress state. Thus Mises yield criterion is more widely used in the finite element numerical analysis.

Key words: Mises yield criterion; strength theory; distortional strain energy density; drilling tools

在地质钻探工具设计和使用过程中,经常会遇到钻采设备、工具失效的问题,需要用到强度理论或屈服准则对失效原因进行分析,为进一步的结构优化提供必要的依据。钻杆接头连接螺纹,尤其深孔绳索取心钻具接头螺纹断裂失效较为突出^[1-3],一般采用 Mises 屈服准则来分析接头螺纹处应力状态。气动潜孔锤凿岩过程中冲锤与钻杆碰撞或 Hertz 接触冲击产生的复杂应力状态,屈曲边界的也是基于 Mises 屈服准则来分析研究的^[4-7],也就是说 Mises 屈服准则在复杂结构或复杂应力的有限元分析中得到越来越广泛的应用,那么,Mises 屈服准则与强度理论之间存在怎样的联系和区别呢?

1 Mises 屈服准则

1864年,Tresca在法国科学院发表了他关于金属在高压下流动的报告,并认为金属流动时最大

切应力保持为一定的常量。Tresca在做了一系列金属挤压实验的基础上,发现在变形的金属表面存在很细的裂纹,而这些裂纹的方向很接近最大切应力的方向,金属的塑性变形是由于剪切应力引起金属中晶体滑移而形成的^[8]。Tresca提出当最大切应力 $\tau_{\max}$ 达到某一极限值时,即 $\tau_{\max} = \sigma_s/2$,材料便进入塑性状态,其屈服准则一般形式:

$$\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}_{\max} = \sigma_s \quad (1)$$

Tresca屈服准则就是第三强度理论,在主应力空间中,与式(1)相关的 Tresca 屈服面为等倾的正六棱柱面,已知主应力的值和次序会容易求出最大剪应力 $\tau_{\max}$,使用 Tresca 屈服准则是很方便的;主应力大小的未知,应用式(1)表示的 Tresca 屈服准则将有一定困难,且 Tresca 屈服准则为不连续的函数。

1913年德国的数学力学家 Mises,用 Tresca

收稿日期:2016-01-07;修回日期:2016-08-10

基金项目:国家自然科学基金支持项目“潜孔锤多柔体系统接触冲击的理论建模”(编号:51275493);中国地质调查局地质调查项目“长寿命钎焊金刚石钻头研发”(编号:12120113096600)

作者简介:肖京,男,汉族,1992年生,硕士研究生在读,机械工程专业,北京市海淀区学院路29号,xiaojingbeck@163.com。

通讯作者:卜长根,男,汉族,1963年生,教授,探矿工程专业,工学博士,从事机械工程、地质工程方面的研究和教学工作,bucg@cugb.edu.cn。

屈服表面外接圆柱面代替六棱柱面,其外接圆半径 $R = \sqrt{2/3} \sigma_s$, 对应的应力偏张量 $r = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/3}$, 基于静水压力球张量不影响材料屈服,提出了只有应力偏张量第二不变量^[9] J_2 达到临界值时,材料开始屈服,此时应力偏张量($r = R$)在 Mises 屈服表面上, Mises 屈服准则可以表示为:

$$\begin{aligned} J_2 &= [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]/6 \\ &= R^2/2 \\ &= \sigma_s^2/3 \end{aligned} \quad (2)$$

相对于 Tresca 屈服准则, Mises 屈服准则是一个连续函数,数学分析处理比较容易,但 Mises 仅从几何直观得到式(2),没有考虑屈服准则的物理属性。

2 Mises 屈服准则与畸变能密度理论

1924 年,德国力学家 Hencky^[10] 经过反复研究,对 Mises 屈服准则进行了物理解释, Hencky 认为无论什么应力状态,只要单位体积畸变能密度^[11] (或称形状改变能密度)达到材料性能的某临界值,材料就发生屈服,经过实验验证, Mises 理论与实验更加吻合。

应变能密度由 2 部分组成,分别为体积改变能密度和畸变能密度。当单元体的 3 个主应力分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 相应的主应变为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, 其体应变为 ε_v 。在三个主应力作用下,单元体变为长方体。可见单元体的变形一方面为体积的增大或减小;另一方面表现为形状的改变。因此,应变能密度 v_e 也由两部分组成:(1)因体积变化而存储的应变能密度 v_v ; (2)由正方体改变为长方体而存储的应变能密度 v_d 。由此可得:

$$v_e = v_v + v_d \quad (3)$$

在三向应力状态下,弹性体应变能与外力做功在数值上是相等的。它只决定于外力和变形的最终值,而与加力过程无关。在线弹性的条件下,每一主应力与相应的主应变之间仍保持线性关系,三向应力状态下的应变能密度为:

$$\begin{aligned} v_s &= (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)/2 \\ &= [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]/(2E) \end{aligned} \quad (4)$$

其中在弹性范围内,由广义 Hooke 定律:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E \\ \varepsilon_2 = [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]/E \\ \varepsilon_3 = [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]/E \end{cases}$$

设单元体的边长分别为 dx, dy 和 dz , 变形前六面体的体积 $V = dx dy dz$, 变形后的体积变 $V_1 = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) dx dy dz$, 略去高阶微量 $\varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_2 \varepsilon_3, \varepsilon_1 \varepsilon_3, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$, 可得变形后的体积变 $V_1 = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) dx dy dz$, 单元体的体应变 ε_v 为:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= (V_1 - V)/V \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &= [(1 - 2\mu)/E](\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \quad (5)$$

令式(5)中 3 个主应力平均值 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ 。式(5)单元体的体应变 $\varepsilon_v = [3(1 - 2\mu)/E] \sigma_m$ 只与 3 个主应力之和有关,若以平均应力 σ_m 代替主应力作用于单元体上,体应变 ε_v 与主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 作用时相等,而以 σ_m 代替原来的主应力后,由于单元体的变形相同,其应变 $\varepsilon_m = [(1 - 2\mu)/E] \sigma_m$, 即静水压力对单元体只有体积变化而无形状改变。因而这种情况下的应变能密度也就是体积改变能密度 v_v , 即:

$$\begin{aligned} v_v &= \sigma_m \varepsilon_m/2 + \sigma_m \varepsilon_m/2 + \sigma_m \varepsilon_m/2 \\ &= 3\sigma_m \varepsilon_m/2 \\ &= [3(1 - 2\mu)/(2E)] \sigma_m^2 \\ &= [(1 - 2\mu)/(6E)] (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

将式(4)与式(6)代入式(3)中,整理得畸变能密度 v_d :

$$\begin{aligned} v_d &= v_e - v_v \\ &= [(1 + \mu)/(6E)] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \quad (7)$$

对于单向拉伸,屈服应力为 σ_s , 则 $\sigma_1 = \sigma_s, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, 材料屈服时的畸变能密度可由式(7)求得:

$$v_d = [(1 + \mu)/(6E)] (2\sigma_s^2) \quad (8)$$

式(8)就是导致材料屈服的畸变能密度的极限值,任意主应力状态下,将式(2)代入式(7)中得:

$$\begin{aligned} v_d &= [(1 + \mu)/(6E)] [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= [(1 + \mu)/E] J_2 \\ &= [(1 + \mu)/(3E)] \sigma_s^2 \end{aligned} \quad (9)$$

此时 $J_2 = \sigma_s^2/3$, 材料开始处于屈服状态,单位体积畸变能密度与应力偏张量第二不变量 J_2 成比例,即 $v_d = [(1 + \mu)/E] J_2$, 因此, Mises 准则就是能

量准则。整理式(9),可得第四强度理论的等效应力 σ_r (或 Mises 应力)表达式:

$$\sigma_r = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \leq \sigma_s \quad (10)$$

因此,Mises 屈服准则其物理意义就是单位体积畸变能密度达到临界值时,材料开始屈服,实质就是第四强度理论。

3 Mises 屈服准则在钻探工具设计中的应用实例

Mises 屈服准则与 Tresca 屈服准则相比,考虑了中间力的影响,且应力偏张量第二不变量为连续函数。在复杂结构或复杂应力的强度分析中,直接使用第四强度理论公式计算并不方便,随着有限元数值分析的发展,在 AQAQUS、LS - DYNA 等软件中,可以得到其应力云图,而有限元软件中应力云图都是以 Von Mises 应力来表示的,因而 Mises 屈服准则在有限元分析中得到越来越广泛的应用。

3.1 工程用钻杆螺纹断裂失效分析

工程钻机钻杆在孔内受各种载荷作用,包括弯曲、扭转、振动及拉压等,钻进时经常出现钻杆断裂现象,严重影响正常生产。管朝晖^[1]对 $\varnothing 42$ mm 钻杆接头连接螺纹强度设计时,首先要求解螺纹牙拉压应力与剪切应力,公式引入载荷不均匀系数 k ,其选取有一定随意性,同时螺纹牙的最大载荷确定也会随螺纹接头结构而变,因而直接应用第四强度理论计算螺纹牙等效应力并不能准确描述其实际所处的应力状态,螺纹接头容易失效,也仅仅是定性分析。螺纹牙与钻杆主体连接处,截面形状复杂,容易出现应力集中,目前较常用的方法主要是基于有限单元法对其进行了强度计算。建立钻杆连接螺纹接触有限元模型,设置边界条件,进行有限元强度计算,可以得到其特定受力工况下螺纹接头的应力状态,由于 Mises 屈服准则应力偏张量第二不变量具有连续性,可以得到考虑应力集中的螺纹牙任意点的等效 Von Mises 应力云图。伴随复杂应力状态有限元强度计算,Mises 应力强度设计获得推广使用。

3.2 冲锤与钎杆碰撞屈曲强度分析

弹性冲锤与钎杆冲击,如图 1 所示,典型的 Hertz 接触碰撞,接触区会产生挤压应力与剪应力,冲锤与钎杆 Hertz 接触冲击处于复杂应力状态,Changgen Bu^[4]通过 LS - DYNA 显式有限元程序模

拟了冲锤撞击钎杆的动力学过程。

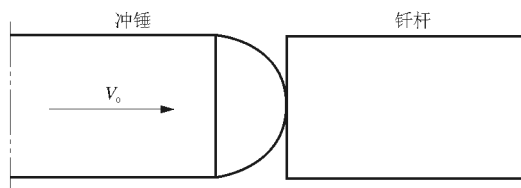


图 1 冲锤撞击钎杆模型

基于 Hertz 理论和 Von Mises 屈服准则,对接触区进行了屈曲强度分析,接触中心处最大压应力 $p_0 = 1.6\sigma_s$ (其中 σ_s 为材料屈服强度)时,接触区域的正下方的最大剪应力处首先发生屈曲变形,其接触区的 Von Mises 应力云图如图 2。

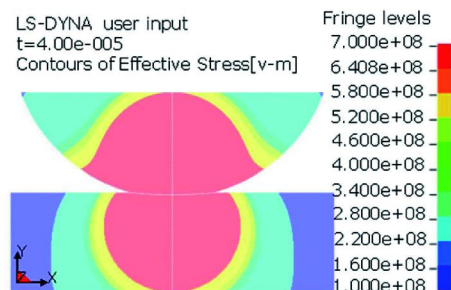


图 2 冲锤与钎杆内部的 Von Mises 应力云图

其最大压应力发生的部位与最大剪应力发生的部位并不相同,使用第四强度理论公式计算等效应力存在一定困难,由于 Von Mises 屈服准则的函数连续性,在 LS - DYNA 有限元软件中,获得其 Von Mises 应力云图,进而方便地对其屈曲强度作进一步分析研究。

4 Mises 屈服准则的应用总结

屈服失效主要是采用 Tresca 的最大切应力理论和 Mises 畸变能密度理论进行分析,两种屈服准则与实验结果都是近似吻合的^[12-13]。其主要原因是 2 个方面:(1)单向拉、压及轴对称应力状态时,第四强度理论的 Mises 屈服准则与第三强度理论的 Tresca 屈服准则是一致的;(2)在纯剪切和平面应力状态下,Mises 与 Tresca 的相对误差最大,但不超过 15.5%^[14]。

与 Tresca 屈服准则相比,Mises 屈服准则考虑了中间力的影响,应力偏张量第二不变量为连续函数,数学处理方便,在弹塑性范围内,Mises 屈服准则统一了单向拉压状态的第一强度理论、复杂应力状态

(下转第 74 页)

漏水点,后又针对漏水点注浆,达到了完全封堵的目的,设计目标全部完成。

3 结论

(1)通过引用温度、温变速率的参数,对 SJP 型浆液与纯水泥浆的水化热进行测定,研究了 SJP 型粘时变浆液水化机制,解释了粘时变性浆液外掺剂的掺入依据,揭示了 2 号早强剂、3 号助剂共同协调水泥二次水化的溶剂化膜理论。

(2)实验证明,SJP 型粘时变浆液具有很好的粘时变性,初配粘度低,可泵期调节范围大,特别是在可泵期内粘度增长缓慢,可泵期后粘度快速增长至失去流动性,并在短时间内达到初凝。这一特点在保证浆液充分灌入地层的同时,避免了过度流失和被地下水稀释,能有效保证注浆效果。

(3)工程应用证明,SJP 型粘时变浆液适用于松散回填层、砂卵石层、裂隙发育的基岩的地基处理注浆,尤其是地下水丰富的地层,能够有效减少因普通水泥浆液等不可控带来的资源浪费和地下水污染。

参考文献:

[1] 编委会.地基处理手册(第三版)[M],北京:中国建筑工业出版社,2016.

版社,365-366,399-409.

- [2] 阮文军,王文臣,胡安兵.新型水泥复合浆液的研制及其应用[J].岩土工程学报,2001,(2):212-216.
- [3] 孙钊,夏可风.98 水利水电地基与基础工程学术交流论文集[C].天津:天津科学技术出版社,1999.
- [4] 葛家良.化学灌浆技术的发展与展望[J].岩石力学与工程学报,2006,25(S2):3384-3392.
- [5] 周厚贵,李焰.三峡工程坝基灌浆与围堰防渗施工新技术[J].水电能源科学,2009,(1):140-143,219.
- [6] 李术才,张霄,张庆松,等.地下工程涌突水注浆止水浆液扩散机制和封堵方法研究[J].岩石力学与工程学报,2011,30(12):2377-2396.
- [7] 邓仁清.高压富水隧道注浆堵水施工技术及应用[J].地下空间与工程学报,2006,(2):263-266,275.
- [8] 阮文军,苏孟元.水泥复合浆液在治理涌水涌砂基坑中的应用[J].工程勘察,2004,(1):36-38.
- [9] 裴向军,黄润秋,李正兵,等.锦屏一级水电站左岸卸荷拉裂松弛岩体灌浆加固研究[J].岩石力学与工程学报,2011,30(2):285-288.
- [10] Coulter S, Martin C D. Single Fluid Jet-grout Strength and Deformation Properties[J]. Tunnelling and Underground Space Technology,2006,21(6):690-695.
- [11] 王继敏,蒋学林.锦屏一级水电站煌斑岩脉水泥化学复合灌浆试验研究[J].长江科学院院报,2010,27(2):60-63.

(上接第 69 页)

的第三强度理论和第四强度理论,尤其在复杂应力状态有限元数值分析中,Mises 屈服准则获得了更为广泛的应用。

参考文献:

- [1] 管朝晖,杨斌.工程用钻杆螺纹断裂失效研究[J].机械设计与制造,2009,(12):152-154.
- [2] 苏继军,殷琨,郭同彤.提高钻杆接头螺纹强度的有效方法研究[J].探矿工程(岩土钻掘工程),2005,32(8):40-42.
- [3] 冯清文.绳索取心钻杆螺纹锥度与强度关系及应力研究[J].探矿工程,1995,(6):24-26.
- [4] Changgen Bu, Boru Xia, Yinjun Lian, et al. Simulation of Hertz Transient Contact/Impact of Flexible Bodies[J]. Journal of Earth Science,2012,23(2):225-232.
- [5] Changgen Bu, Yegao Qu, Zhiqiang Cheng, et al. Numerical Simulation of Impact on Pneumatic DTH Hammer Percussive Drilling[J]. Journal of Earth Science,2009,20(5):868-878.
- [6] Maohong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century[J]. Applied Mechanics

Reviews,2004,55(3):169.

- [7] Bu C, Li X, Sun L, et al. Arithmetic solution for the axial vibration of drill string coupling with a down-the-hole hammer in rock drilling[J]. Journal of Vibration & Control,2016,22(13):3090-3101.
- [8] 徐秉业,刘信声.应用弹塑性力学[M].北京:清华大学出版社,1995.
- [9] Krenk S. A Family of Invariant Stress Surfaces[J]. Journal of Engineering Mechanics,2014,122(3):201-208.
- [10] Hill R. The mathematical theory of plasticity[J]. Mathematical Gazette,1998,313(35):13-26.
- [11] 杨桂通.弹塑性力学引论[M].北京:清华大学出版社,2004.
- [12] Emmens, Wilko C, d. B. A. H. Van. A Yield Criterion Based on Mean Shear Stress[J]. Key Engineering Materials,2014:611-612.
- [13] Christensen R M. Yield functions/failure criteria for isotropic materials[J]. Proceedings of the Royal Society A,1997,453:1473-1491.
- [14] <http://wenku.baidu.com/view/4c793706bed5b9f3f90f1c6c.html?re=view>[DB/OL].