第1卷　第3期　　地质力学学报　　Vol. 1　No. 3
1995年12月　　JOURNAL OF GEOMECHANICS　　Dec. 1995

运动学涡度、极摩尔圆及其在一般剪切带定量分析中的应用*

张进江　郑亚东
（北京大学地质学系）

摘　要　自然界中剪切带通常是由平行于剪切带方向的简单剪切和与之垂直的纯剪切共同作用的结果。利用运动学涡度(W_K)可以定量地分析两者间的比值大小。一般摩尔圆只能应用于共轴应变，而极摩尔圆可应用于共轴与非共轴变形，并为求取 W_K 提供了一种简便可行的方法。本文对一般剪切带的概念及其分类进行了描述，对运动学涡度和极摩尔圆的原理及其应用进行了系统的论述，并在此基础上提出了几种新的实用的极摩尔圆编制方法。

关键词　一般剪切带　运动学涡度　极摩尔圆

0　前言

在岩石变形分析中，变形可分为 3 种基本类型：纯剪切、简单剪切和刚体旋转。在剪切带研究中，为了简化分析一般将其看作简单剪切并以简单剪切理论进行研究。但自然界岩石的变形并非如此简单，因为简单剪切只能发生在一个平直的变形带内，体积不发生变化且具有不变形的平行边界[1]。自然界中剪切带的变形则要复杂得多，通常是平行于剪切流方向的简单剪切和纯剪切共同作用的结果，即一般剪切带[2]。一般剪切可划分为次简单剪切和超简单剪切。次简单剪切是指应变的旋转分量小于同等强度简单剪切旋转分量的剪切，而超简单剪切则与之相反[3]。超简单剪切一般发生在变形碎斑系内或剪切带发生弯曲等特殊部位，在研究非均匀应变时，这种剪切形式很重要，但就剪切带整体而言，一般可视为次简单剪切[4]。次简单剪切带变形过程中可以增厚也可减薄，当纯剪切组分最大主拉伸轴平行于剪切带剪切方向时，剪切带发生减薄，而纯剪切组分最大主轴垂直于剪切带时剪切带则增厚。

一般剪切属非共轴变形范畴，传统应变摩尔圆不适用。如何确定一个剪切带的性质，是纯剪切、简单剪切还是一般剪切？一般剪切中两组分间的比值如何？以及剪切带是增厚还是减薄？回答上述问题需对剪切作用作具体定量分析。运动学涡度(W_K)是变形旋转分量的度量，是剪切作用定量分析的重要依据，极摩尔圆适用于共轴与非共轴变形，为求运动学涡度提供了简便可行的方法。

关于剪切带运动学涡度的研究在国外始于 80 年代，研究方法有多种，如双曲线法[4,5]、碎

* 国家自然科学基金资助项目。

斑系稳定位置法[6]、石英光轴法、刚性矿物旋转法和应变标志法[7,8]等。但这些方法在应用上有一定的局限性，更重要的是它们的定量化程度不高，仅限于半定量化。极摩尔圆法是目前定量化程度最高的方法，但 Simpson 和 De Paor[4]在提出该法时只对其简单原理进行了论述，没提到实际应用，而且由于其对标志体的要求太高，故实用价值不大。在国内，目前尚未开展这方面的工作。据此本文对运动学涡度、极摩尔圆进行了系统论述，并在此基础上提出了一些实用的新方法。

1 运动学涡度(W_K)

涡度(W)是对物质递进变形中非共轴性的一种度量，其值 $W=2\omega_{sm}$，式中 ω_{sm} 为物质线相对于瞬时主应变轴的角速度[9]。而运动学涡度：

$$W_K=\frac{W}{\sqrt{2(S_1^2+S_2^2+S_3^2)}}$$

式中 W 为涡度，S_i 为主拉伸率[10]。二维应变中，W_K 为变形体平均角速度和偏差应变速率之比，也是正应变速率($\dot{\varepsilon}$)和剪切速率($\dot{\gamma}$)比值($\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$)的一种量度，其间关系为 $W_K=\cos[\mathrm{tg}^{-1}(2\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma})]$[11]。用场论对运动学涡度进行分析时，许多学者应用了特征向量的概念。具体到物质变形中，特征向量就是变形中非旋转物质线的向量。在一个二维变形场中一般有两个特征向量，其间夹角为 $\upsilon=\mathrm{tg}^{-1}(2\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma})$，所以运动学涡度 $W_K=\cos(\upsilon)$[3,4,6,11,12]。

利用特征向量进行分析，可得到以下几个二维应变的结果：

(1)纯剪切具有两相互垂直且平行于主应变轴的特征向量，$\upsilon=90°$，$W_K=0$(图 1a)。简单剪切只有一个平行于剪切方向的特征向量，可视为两特征向量重合，即 $\upsilon=0°$，$W_K=1$(图 1b)。一般剪切情况下具有两相斜交的特征向量(e_1 和 e_2)，$0°<\upsilon<90°$。$0<W_K<1$(图 1c、d)。

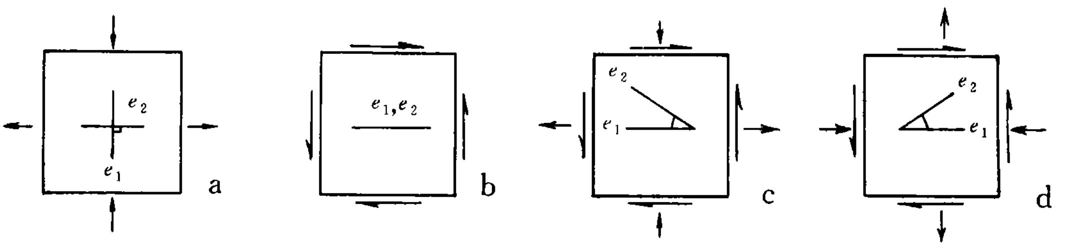

图 1 特征向量(e)与变形状态之间的关系

Fig. 1 The relationship between eigenvectors and deformation states

a. 纯剪切；b. 简单剪切；c. 减薄的一般剪切；d. 增厚的一般剪切

(2)特征向量间的夹角 υ、运动学涡度 W_K 和应变速率比值($\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$)的关系如图 2 所示[11]。图 2a 中 υ 和($\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$)的正负符号规定如下：一般剪切中从 e_1 顺或反时针至 e_2 量一锐角的方式与剪切方式一致时(图 1c)，υ 为负值，$\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ 为正值，此时为减薄的一般剪切带。反之量角方式与剪切方式相反(图 1d)，则 υ 为正值，$\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ 为负值，此时为增厚的一般剪切带。

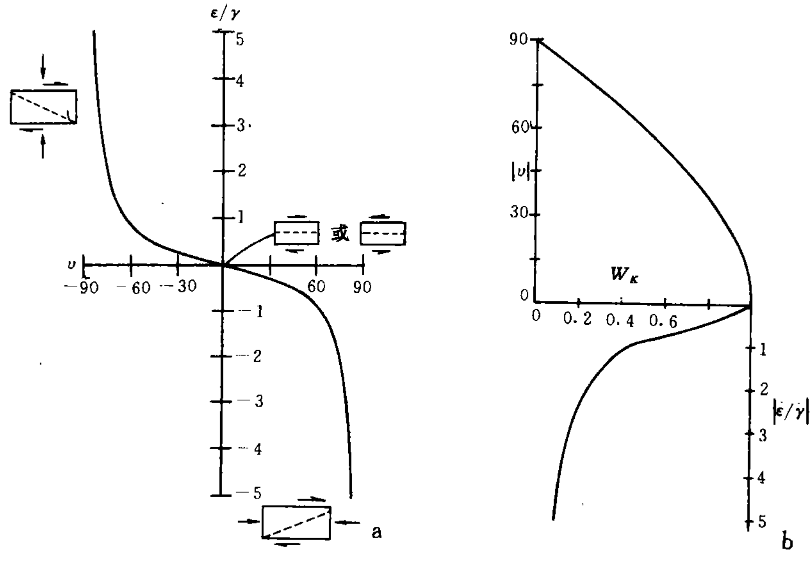

图 2　υ、$\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ 和 W_K 关系图

Fig. 2　The relationship among υ, $\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ and W_K

a. υ 和 $\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ 的关系；b. $|\upsilon|$、$|\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}|$ 和 W_K 的关系

2　极摩尔圆

据运动学涡度定义 $W_K=\cos(\upsilon)$，只要获得 υ 即可求出 W_K 以及 W_K、υ 和 $\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$ 之间的关系。编制极摩尔圆是求 υ 的主要途径。

极摩尔圆是由长度比摩尔圆转换而来，Means[13,14]和 De Poar[3]。对长度比摩尔圆的建立和应用原理进行了系统论述。设一个单位面积的正方形，其上各点变形前后的坐标分别为 (X_1,X_2) 和 (x_1,x_2)（图 3a）。两者之间的关系为

$$x_1 = T_{11}X_1 + T_{12}X_2$$
$$x_2 = T_{21}X_1 + T_{22}X_2$$

其位移张量为

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

以 $T_{ij}(i=j)$（平行于物质线初始方向的长度比）为横坐标，$T_{ij}(i\neq j)$（物质线的横向位移）为纵坐标建立一个坐标系。那么变形正方形中所有物质线（直线）的变形状态均落在一过 $P_1(T_{22},T_{12})$ 和 $P_2(T_{11},-T_{21})$ 两点连线为直径的圆上，这个圆就是该变形正方形的长度比摩尔圆（图 3b）。

图 3b 中 P_1、P_2 分别代表两条初始方向相互垂直直线的变形状态。由坐标原点作直线 OP_1 和 OP_2。由于点的横、纵坐标分别是直线平行于原方向的长度比和与之垂直的横向位移，所以 OP_1 和 OP_2 的长度则分别为两直线的长度比(S)，OP_1 和 OP_2 与横轴的夹角 ϕ_1 和 ϕ_2 分别应是两直线相对于自身初始方向的旋转角，$\psi=\phi_1+\phi_2$ 即为角剪应变。同理，摩尔圆上任意一点 P 所

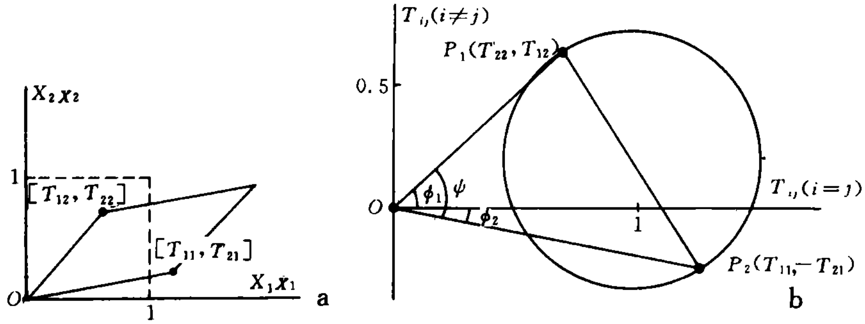

图 3　长度比摩尔圆

Fig. 3　Stretch Mohr circle

代表直线的长度比(S)就是直线 OP 的长度,OP 与横轴的夹角 ϕ 为其旋转角(图 4)。

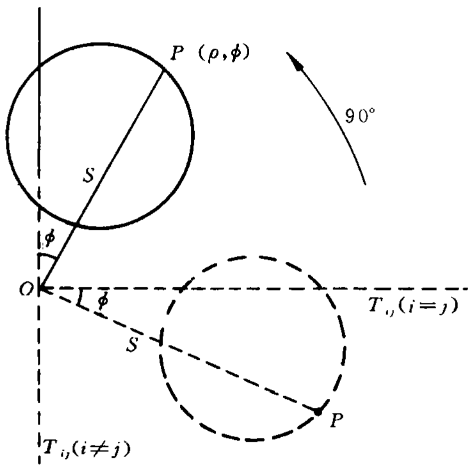

图 4　长度比摩尔圆向极摩尔圆的转换

Fig. 4　The transformation from stretch Mohr circle to polar Mohr circle

根据以上结果,可以将长度比摩尔圆转换为极坐标摩尔圆(图 4)。在极坐标系中,摩尔圆上点的坐标为(ρ,ϕ),极径 ρ 是该点所代表直线的长度比(S),角坐标 ϕ 是直线相对于极轴的旋转角。根据长度比摩尔圆的原理和两条初始垂直直线的变形状态确定摩尔圆直径的原则,可建立一极摩尔圆,具体步骤如下:

(1) 选择剪切带边界的法线作为极坐标的极轴(原始轴),沿剪切方向(非旋转方向)测量其长度比 ξ_1,其极坐标为(ξ_1,0)。

(2) 寻找一条初始与剪切带边界垂直的线性标志,如剪切带中与剪切方向初始垂直的脉体,测量其长度比 S_0 及旋转角 ψ_0,坐标为(S_0,ψ_0)。

(3) 以上述两点连线为直径作圆,即得该剪切带的极摩尔圆(图 5)。

图 5 中,点(S_0,ψ_0)是唯一既在摩尔空间又在实际空间的点,称为锚点,为维系两空间的枢纽,变形前后全部取向的物质线均通过该点。

上述极摩尔圆的编制方法是一种特例,在实际应用中有一定困难。一者野外两组同时平行和垂直剪切方向的标志很难找到,再者两组标志的同时性不易判定。所以需要寻找更具普遍应用价值的极摩尔圆编制法。本文在此提出了 3 种更为实用的方法,这 3 种方法所需数据野外较易测量,且方法很多已成熟。

(1)已知剪切带长度轴比 R_s 和最大拉伸方向与剪切方向的夹角 α。

设 $S_1=R_s$,$S_2=1$,作直线线段 $O-1-R_s$,由 R_s 点作直线 R_sO',其与 $O-1-R_s$ 的夹角为 α,从 1 点作 R_sO' 的垂线,其交点即为(ξ_2,0),从 O 点过点(ξ_2,0)作直线即为极坐标的极轴,再以线段 $1-R_s$ 中点 O''为圆心,过 R_s、(ξ_2,0)和 1 作一圆,就可得到剪切带的极摩尔圆(图 6)。

(2)已知平行剪切方向的长度比 ξ_1、最大拉伸长度比 S_1 及其与剪切方向的夹角 α。极摩尔

圆的编制原理与方法如图 7 所示。在极坐标轴上作(ξ_1,0)，并从此点作与水平线(剪切方向)夹角为 α 的直线。从坐标原点 O 作直线与上一直线交于 S_1 点，使 $OS_1=S_1$(主拉伸长度比)。作(ξ_1,0)-S_1 的中垂线和 OS_1 交于 O'，以 O' 为圆心，过 S_1 和(ξ_1,0)作圆，即得剪切带的极摩尔圆。

(3) 已知任意两个方向的长度比 S_A 和 S_B，它们和剪切方向的夹角 θ_A 和 θ_B 以及两者间的夹角 α。如图 8，以 O 点为原点作直线线段 $OA=S_A$，若已知测区的 R_s，则取 $OA'=R_s/S_A$，否则取 $OA'=1/S_A$，作 AA'' 使 $\angle OAA''=\theta_A$。作 $OB=S_B$ 和 BB''，使 $\angle OBB''=\theta_B$，$\angle OBA'=\alpha$。AA'' 和 BB'' 交于一点即为(ξ_2,0)，由 B、A、A' 和(ξ_2,0)确定的圆就是剪切带的极摩尔圆，由 O 过(ξ_2,0)的直线就是参考极轴。

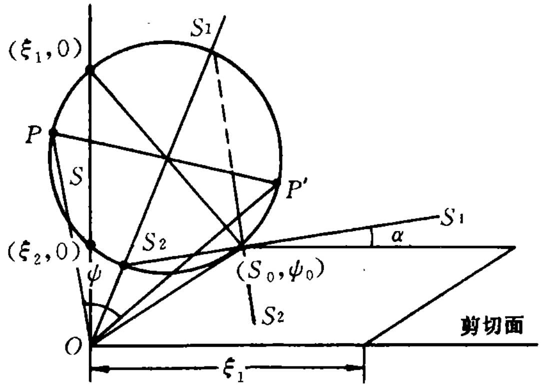

图 5 剪切带极摩尔圆的编制

Fig. 5 Construction of polar Mohr circle of shear zone

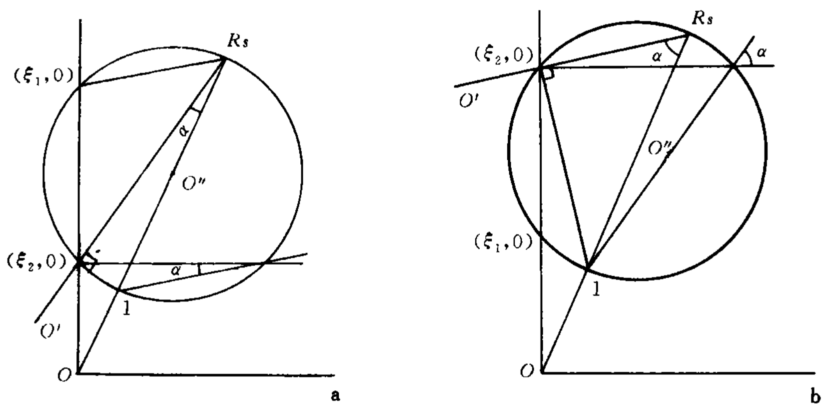

图 6 利用 R_s 和 α 建立极摩尔圆

Fig. 6 Construction of polar Mohr circle with R_s and α

a. 减薄的 -般剪切带；b. 增厚的一般剪切带

建立该极摩尔圆后，可作以下几种测量：

(1)求主长度比。从坐标原点过摩尔圆圆心作直线，和摩尔圆相交于两点，两点的极径 S_1、S_2 为该应变的主长度比(图 5)。

(2)求某一直线的长度比和角剪应变。摩尔圆上任一点 P 的极径就是该点所代表直线的长度比 S。由 P 点过圆心作直径与摩尔圆交于 P'，P' 代表与 P 初始垂直的直线，OP 和 OP' 的夹角 ψ 为该直线的角剪应变(图 5)。

(3)求变形前后某一直线与剪切方向的夹角。任一点 P 所代表的直线与剪切方向的初始夹角 β 及变形后的夹角 β'($\beta-\alpha$)，可以通过锚点用如图 9 所示的方法求得。

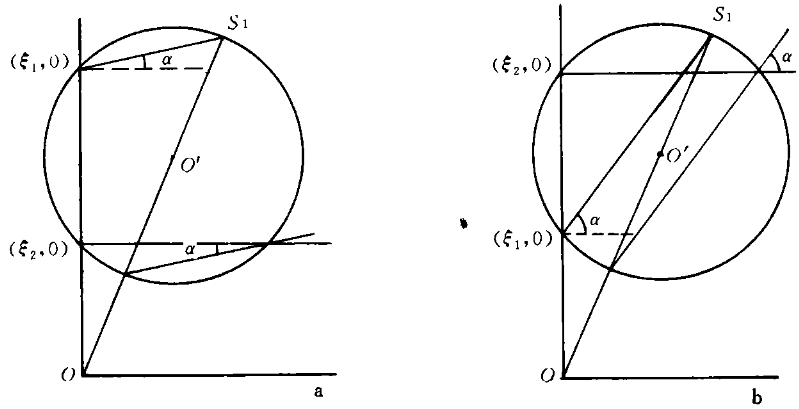

图 7 利用 ξ_1、S_1 和 α 编制极摩尔圆

Fig. 7 Construction of polar Mohr circle with ξ_1, S_1 and α

a. 减薄的一般剪切带；b. 增厚的一般剪切带

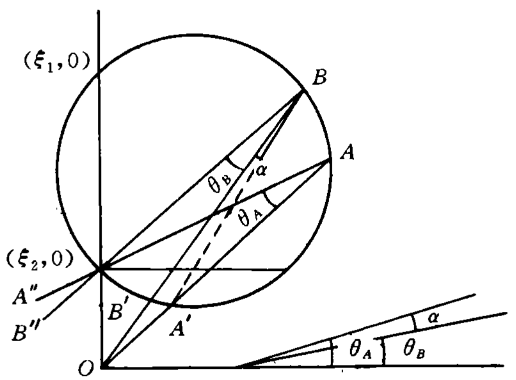

图 8 利用任意两个方向的长度比建立极摩尔圆

Fig. 8 Construction of polar Mohr circle with strechings of two arbitrary directions

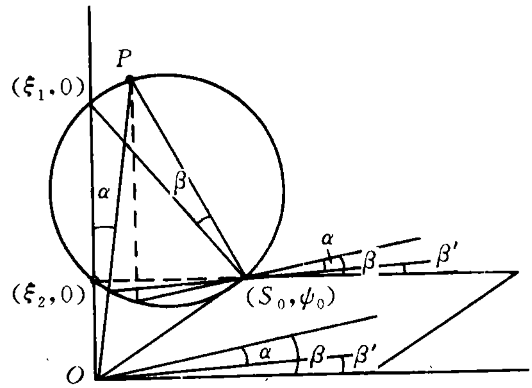

图 9 任一直线与剪切方向初始夹角 β 和变形后的夹角 β'

Fig. 9 The angle β and β' between a line and the shear direction

注意极摩尔圆中测量角度的方向与实际角度的测量方向相反，如实际中从剪切方向到该直线的锐角测量方向为顺时针时，在摩尔圆中为逆时针。根据特征向量角度符号的确定，两特征向量的夹角 υ 在极摩尔圆为逆时针时，则为负值，反之，υ 为正值。

(4)求应变主方向。和上述 3 的原理相同，在图 5 中由 S_2 向 (S_0,ψ_0) 引直线得到角 α，即为 S_1 和剪切方向的夹角。

(5)求剪切带厚度的变化。$(\xi_1,0)$ 和 $(\xi_2,0)$ 比较，如果 ξ_1 值大，剪切带减薄，否则增厚。极摩尔圆圆心在极轴上垂直投影坐标为 $(L,0)$，ξ_2/L 就是剪切带的厚度变化，其原厚度为 $H\times L/\xi_2$，H 为现厚度。

(6)求特征向量的夹角 υ（见 υ 的求法）。

3 υ 的求法

一般情况下，极摩尔圆与极轴有两个交点$(\xi_1,0)$和$(\xi_2,0)$，这两点分别代表剪切中方向保持不变的两特征向量，其中$(\xi_1,0)$为剪切方向。作锚点(S_0,ψ_0)与$(\xi_1,0)$和$(\xi_2,0)$的连线，其间的夹角就是两特征向量间的夹角υ(图 10)。υ的方位可能出现两种情况，即图 10a 所示的逆时针方向和图 10b 的顺时针方向。说明图 10a 的第二特征向量$(\xi_2,0)$和剪切方向$(\xi_1,0)$的实际夹角实际为顺时针方向，即锐角υ指向剪切方向，此时υ为负值，$\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$为正值，剪切带为纯剪切最大主拉伸轴平行于剪切方向的减薄一般剪切带。图 10b 所示的情况与之相反。

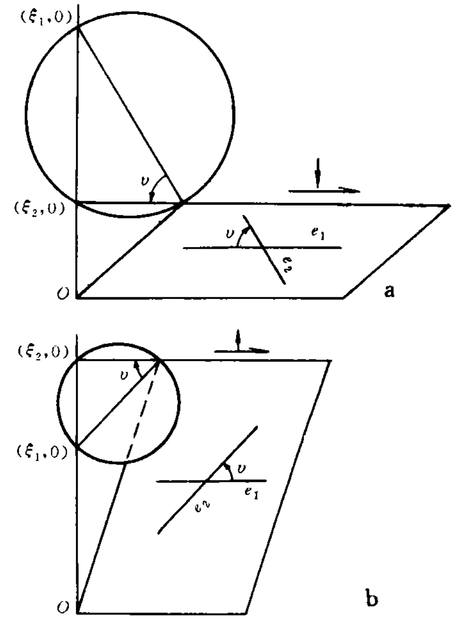

图 10　利用极摩尔圆求 υ

Fig. 10　υ obtained from a polar Mohr circle

a. 减薄的一般剪切带；b. 增厚的一般剪切带

(据 Simpson 和 De Paor，1993)

在作极摩尔圆时可能会出现两种特例，一种是极摩尔圆的圆心落在剪切方向(参考极轴)上，这种情况为纯剪切状态(图 11a、b)，$\upsilon=90°$，$W_K=0$。另一种情况是极摩尔圆与剪切方向相切，此时为简单剪切(图 11c)，$\upsilon=0°$，$W_K=1$。

在第一种特例中有两种情况，一种情况是第一特征向量(剪切方向)$(\xi_1,0)$的值大于第二特征向量$(\xi_2,0)$的值，此时为最大拉伸方向平行于剪切方向的纯剪切(图 11a)。另一种情况是第一特征向量$(\xi_1,0)$小于第二特征向量$(\xi_2,0)$，此时为拉伸方向垂直于剪切方向的纯剪切(图 11b)。

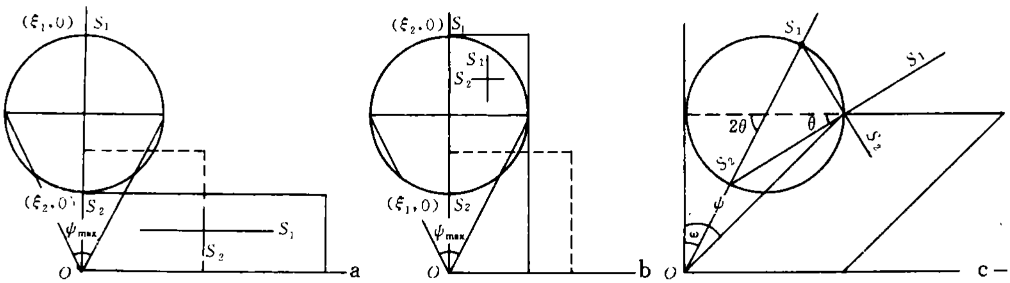

图 11　极摩尔圆的特例

Fig. 11　Special examples of polar Mohr circles

求出υ后，即可求得$W_K=\cos(\upsilon)$，同时根据υ的正负和图 2，确定υ、W_K和$\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$的关系。

4 实例

出露在内蒙亚干变质核杂岩东南翼上的韧性剪切带[15]，主要由糜棱状片麻岩和碳酸质糜棱岩组成，其中发育同构造期长英质脉体。平行于剪切带的碳酸质糜棱岩中发育层状富石英层的肿缩和拉分构造(图 12)。同构造长英质脉体呈网状产出，一组平行剪切带，另一组初始产状和剪切方向垂直并随剪切逐渐弯曲变薄，明确指示正断式剪切方式(图 13)。这两类标志体为极摩尔圆的应用提供了颇为理想的条件。定量分析的具体过程如下：

(1)首先采用 Hossain[16]方法测出脉体的现长(L)。

(2)用求积仪测出相应的面积(A)，设脉体的最大宽度(H)(近似原宽度)，利用面积平衡($L_0=A/H$)求出原长(L_0)。

(3)利用 $S=L/L_0$，算出脉体的长度比(S)。

(4)测出原始方向与剪切方向垂直脉体的角剪应变(ψ_0)。

两组脉体的测量结果如图 12、13 所示，一组平行于剪切方向即第一特征向量的长度比(图 12 中的 S)$\xi_1=1.51$，另一组脉体的长度比 $S_0=1.60$，其角剪应变 $\psi_0=70°$。

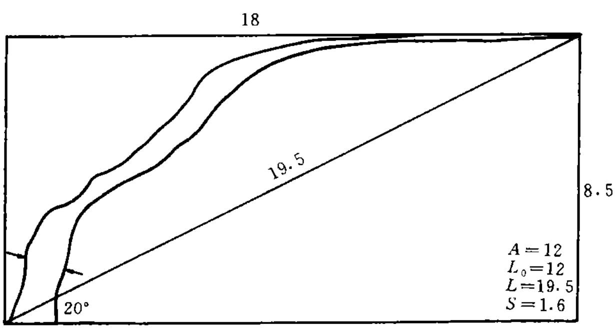

图 12 平行于剪切方向的石英白云质脉体

Fig. 12 Quartz-dolomatic vein parallel with shear direction

根据这些数据建立如图 14 的极摩尔圆，可以测出第一、二特征向量(ξ_1,0)和(ξ_2,0)分别为(1.51,0)和(0.55,0)，两者间的夹角 $\upsilon=31.5°$，$W_K=\cos(\upsilon)=0.85$。顺时针方向度量的 υ 为负值，故为一减薄的一般剪切带。从图 2 中可得剪切带的应变速率比 $\dot{\epsilon}/\dot{\gamma}=0.31$。剪切带中简单剪切占主导地位，而最大拉伸轴平行于剪切方向的纯剪切分量较小。极摩尔圆中，剪切带的两个主长度比 S_1 和 S_2 分别为 2.15 和 0.37，轴率 $R_s=S_1/S_2=5.8$。S_1 与剪切方向的夹角 $\alpha=11°$。为了检验这一数值的可靠性，野外实测糜棱岩中 S－C 面理夹角为 12°±3°，与利用极摩尔圆的预测值基本吻合，其间的误差可能是面积平衡过程中设脉体的最大宽度为原始宽度引起的，实际上平行于剪切面的脉体的最大宽度也受到了一定的挤压，求得的长度比较实际长度比稍大；而垂直脉体的宽度在变形中也受到一定的拉张，S_0 要比实际略小。

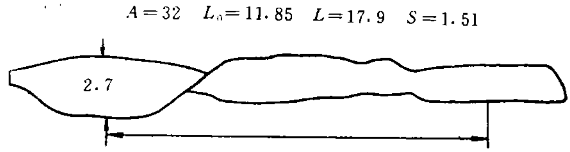

图 13 垂直于剪切方向的长英质脉体

Fig. 13 Folsic vein normal to shear direction

5 总结

自然界中的韧性剪切带通常是由平行于剪切方向的简单剪切和与之垂直的纯剪切共同作用的结果,即一般剪切带。有必要对不同构造环境中的剪切带的剪切作用类型进行具体定量分析。运动学涡度是划分剪切作用类型的定量依据,极摩尔圆法为求运动学涡度提供了一种简便有利的工具。这种方法为剪切带的研究开创了新的一页,使其定量化研究得到了更进一步的发展。更为重要的是,目前伸展构造是一个研究热点,人们对大型剪切带的逆冲或伸展性质的鉴定极为关注,而应用的方法多是常规的运动学标志,极摩尔圆和运动学涡度理论为此提供了一种精确的定量标志,使伸展构造的研究更为深入。在实际可行性应用分析中初步得到了验证,据极摩尔圆作出的一些预测与实测基本吻合,应该说此方法具有广阔的应用前景。

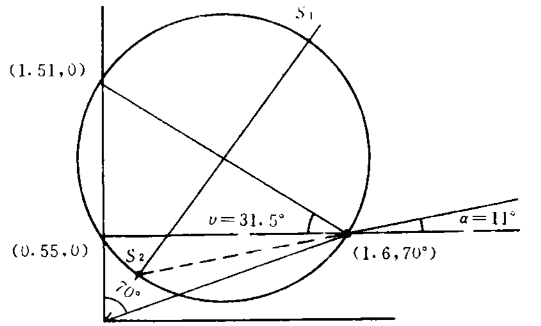

图 14 亚干韧性剪切带的极摩尔圆

Fig. 14 The polar Mohr circle of Yagan shear zone

参 考 文 献

1 Ramsay R G, Graham R H, Strain variations in shear belts. Can. J. Earth. Sci. 1970, 7(6): 786—810.

2 Matthews P E, Bond R A B, Van den Berg J J, An algebraic method of strain analysis using elliptical makers. Tectonophysics, 1974, 24(1): 31—67.

3 De Paor D G. Orthographic analysis of geological structures-I. Deformaticnotheory. J. Struct. Geol. 1983, 5(3/4): 255—278.

4 Simpson C, De Paor D G. Strain and kinematic analysis in general shear zones J. Struct. Geol. 1993, 15(1): 1—20.

5 De Paor D G, R_f/ϕ_f strain analysis using orientation net. J. Struct. Geol. 1988, 10(4): 323—333.

6 Passchier C W, Stable positions of rigid objects in shear zones. J. Struct. Geol. 1987, 9(5/6): 679—690.

7 Visser R L M, Asymetric quartz c—axis fabrics and flow vorticity: a study using rotated garnets. J. Struct. Geol. 1989, 11(3): 231—244.

8 Wallis S R, Vorticity analysis in a metachert from the Sanbagawa Belt, SW Japan. J. Struct. Geol. 1992, 14(3): 271—280.

9 Means W D, Hobbs B E, Lister G S, Williams P F, Vorticity and non-coaxiality in progressive deformation. J. Struct. Geol. 1980, 2(3): 371—378.

10 Truesdell C. The kinematics of vorticity. Indiana University Press Bloomiton, 1954.

11 Bobyarchick A R, The eigenvalues of steady state flow in Mohr space. Tectonophysics, 1986, 122(1/2): 35—51.

12 Passchier C W, Flow in natural shear zones——the consequences of spinning flow regimes. Earth Planet. Sci. 1986, 77(1): 70—80.

13 Means W D, An unfamiliar Mohr circle construction for finite strain. Tectonophysics, 1982, 89(4): T1—T6.

14 Means W D, Application of the Mohr circle construction to problems in homogeneous deformations. J. Struct. Geol. 1983, 5(3/4): 279—286.

15 郑亚东、王玉芳,内蒙亚干变质核杂岩剪切作用类型的初步分析。地学前缘(待刊)。

16 Hossain K M, Deformation of strain from stretched belennites. Tectonophysics, 1979, 60(3/4): 279—288.

KINEMATIC VORTICITY, POLAR MOHR CIRCLE AND THIER APPLICATION IN QUANTITATIVE ANALYSIS OF GENERAL SHEAR ZONES

Zhang Jinjiang　Zheng Yadong

(Department of Geology, Peking Universsity)

Abstract Most of shear zones in nature are results of co-actions of simple and pure shears and called general shear zones. A general shear zone can be narrowed or broadened. The relationship between simple and pure shears, and the change of shear zones in thickness can be analysed quantitatively by the method of kinematic vorticity (W_K) and polar Mohr circle. The kinematic vorticity is a measure of the non-coaxiality in progressive deformation history and, therefore, is the ratio of the pure shear to simple shear of a general shear zone.

$W_K = \cos(\upsilon)$, where υ is the angle between the two eigenvectors in a shear zone. For a pure shear, $\upsilon = 90°$, $W_K = 0$; for a simple shear, $\upsilon = 0°$, $W_K = 1$; and for a general shear, $0° < \upsilon < 90°$, $0 < W_K < 1$. A polar Mohr circle, which can be constructed with some more practical methods presented by this paper, provides a convenient and feasible method for measuring υ.

Once a polar Mohr circle is constructed, the angle(υ), kinematic vorticity (W_K), ratio of the strain-rates($\dot{\varepsilon}/\dot{\gamma}$) and the change of thickness of a shear zone can be obtained.

Key words　general shear zone, kinematic vorticity, polar mohr circle

第一作者简介

张进江，男，1964 年生，1982－1989 年就读于北京大学地质系并获硕士学位。现为北京大学地质系博士研究生，研究方向：构造地质。通讯地址：北京大学地质系。邮政编吗：100871。