

非对称多层薄板折算力学模量的讨论

武 红 岭

(中国地质科学院地质力学研究所)

摘 要 为使有限单元法中的板壳单元更适合于分析地学问题,本文放弃前人对多层薄板的几何和弹性对称性限制,根据等效原则,重新推导了非对称多层薄板的中性面位置,进而给出了用各分层弹性模量和厚度表示的折合抗弯刚度及弹性模量。并结合两个三层地壳模型例题讨论了地壳各分层弯曲和薄膜应力与等效应力的差异。

关键词 非对称多层薄板 折算力学模量 等效应力 分层应力

0 引言

对地学问题进行有限元数值模拟分析时,板壳单元由于更接近于地学实际而为多数人采纳(如:地壳、地幔、岩石圈的厚度往往远小于所要研究区域的长度和宽度,满足薄板、薄壳理论前题)但因板壳单元本质上属于二维元,用于代表实际情况仍有不尽人意之处。如:板壳元在厚度方向上不分层,采用统一的弹性常数 E 、 ν 值。事实上,岩石圈各圈层岩石力学性质的差异极大地影响着各圈层构造应力场和形变场的特征。

前苏联学者曾针对这方面的问题研究各向异性板,给出了多层弹性薄板用各层模量和厚度表示的折合抗弯刚度和相应的力学公式,发展了一般的板壳理论^[1]。然而,他们假设多层板相对于中性面具有几何和弹性对称性(现有的结构分析程序中的复合材料板壳单元依据的也是这一假定),使得在应用于实际地学问题时受到很大限制。

本文意在放弃上述对称限制,根据等效原则,推导非对称多层薄板的折合弹性模量与各分层弹性模量和厚度的对应关系,以及对薄板各层内力的影响,以便更好地应用于地质构造分析。

1 理论分析和讨论

1.1 力学模型

考虑由各向同性的弹性薄层粘合而成的非均匀板,如果已知每一层的弹性常数($E_i, \nu_i, i=1, \dots, n$),能够导出整体板的抗弯与抗扭刚度,以及板在外力作用下形变的折合弹性模数。

图1是一个三层弹性薄板的微元截面模型。板的总厚度设为 $h = h_1 + h_2 + h_3$, e 是中性面到

下表面的距离。需要注意的是,模型的中性面不再位于板厚的正中央,即: $e \neq h/2$,但仍可按右手螺旋法则规定其为 xy 平面。

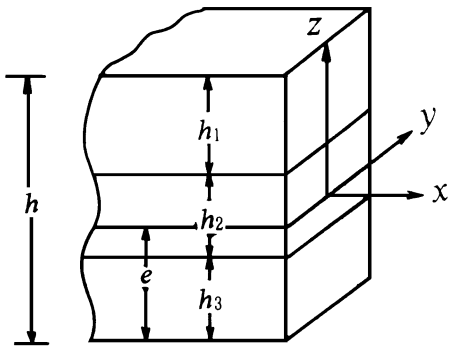


图 1 非对称三层薄板截面模型

Fig. 1 A cross section model for a three-layer unsymmetrical plate

为获得折合弯曲模量,用 D^e , E^e 和 w^e 代表,我们还需要假定:

- (1) 各层粘牢在一起发生弯曲变形,层间不发生滑动
- (2) 广义平面应力状态,忽略垂直于平板中性面的法向应力, $\epsilon_z = 0$
- (3) 多层薄板变形前垂直于中面的直线,变形后仍为垂直于中曲面的直线段,且长度不变。即:直法线假定。

(4) 多层组合板厚度 h 与平面尺寸相比是小量,仍可视作薄板,可应用薄板弯曲理论。

1.2 中性面距离 e 的重新定位

弹性薄板理论假定板弯曲时中性面不发生面内变形,面内的应力值为零。均匀板的中性面位于板中央, $e = h/2$ 在非对称多层板的情况下,中性面的性质仍然不变,但是 $e \neq h/2$ 以下是对中性面距离与各层参数关系的推导。

考虑纯弯曲情形,横截面上的应力有如下关系式:

$$\left. \begin{aligned} \int_1 \epsilon_{x1} dz + \int_2 \epsilon_{x2} dz + \int_3 \epsilon_{x3} dz &= 0 \\ \int_1 \epsilon_{y1} dz + \int_2 \epsilon_{y2} dz + \int_3 \epsilon_{y3} dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 ϵ_{xi} 代表第 i 层截面上 x 方向应力, ϵ_{yi} 为 y 方向应力。

弹性板的物理方程为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2} (\kappa_x + \nu \kappa_y) \\ \epsilon_y &= \frac{EZ}{1-\nu^2} (\kappa_y + \nu \kappa_x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 κ_x, κ_y 为中性面 $z=0$ 的曲率改变量,是 x, y 的函数,与 z 无关。在小挠度 $w \ll h$ 的情况下,

$$\kappa_x \cong - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \kappa_y \cong - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3)$$

将(2)代入(1),由于 κ_x, κ_y 与 z 无关,可有:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\kappa_x + \nu_i \kappa_y) \int_i z dz &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\kappa_y + \nu_i \kappa_x) \int_i z dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将两式相加,得下式:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-\nu_i} (\kappa_x + \kappa_y) \int_i z dz = 0$$

由层间变形连续条件,各层的曲率 κ_x, κ_y 相同且是常数,于是得到:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{E_i}{1-\nu_i} \int_i z dz = 0 \quad (5)$$

分别将各层积分上下限代入,并设:

$$E_i'' = \frac{E_i}{1-\nu_i} \quad (i = 1, 2, 3,) \quad (6)$$

$$E_1'' z^2 \Big|_{h-e-h_1}^{h-e} + E_2'' z^2 \Big|_{h_3-e}^{h-e-h_1} + E_3'' z^3 \Big|_{-e}^{h_3-e} = 0$$

解得下式:

$$e = \frac{E_1'' h_1 (2h_3 + 2h_2 + h_1) + E_2'' h_2 (2h_3 + h_2) + E_3'' h_3^2}{2(E_1'' h_1 + E_2'' h_2 + E_3'' h_3)} \quad (7)$$

经缩写,并设 $h_0 = 0$ 可得到 n 层板中性面距离的一般表达式:

$$e = \frac{\sum_{i=1}^n E_i'' h_i \left(2h - h_i - \sum_{k=0}^{i-1} h_k \right)}{\sum_{i=1}^n E_i'' h_i} \quad (8)$$

1.3 弯曲等效导出抗弯刚度和弯曲折算模量

对于均匀板由弹性薄板的直线假设,并利用(2)和(3)式,可得单位中面长度上的截面弯矩为:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_x z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_y z dz = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中抗弯刚度

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (10)$$

根据弯曲等效原则,可参照上式得到多层非均匀板的折算抗弯刚度
令:

$$E_i' = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} D^e &= \frac{E_b h^3}{12(1-\nu_b^e \nu_b^e)} = \sum_{i=1}^3 E_i' \int_i z^2 dz \\ &= \frac{1}{3} (E_1' z^3 \Big|_{h-e-h_1}^{h-e} + E_2' z^2 \Big|_{h_3-e}^{h-e-h_1} + E_3' z^3 \Big|_{-e}^{h_3-e}) \\ &= \frac{E_1'}{3} [(h-e)^3 - (h-e-h_1)^3] + \frac{E_2'}{3} [(h_3-e-h_1)^3 - (h_3-e)^3] \\ &\quad + \frac{E_3'}{3} [(h_3-e)^3 - (-e)^3] \end{aligned} \quad (12)$$

令 $h' = h-e, h_0 = 0$ 可将上式缩写并推广至 n 层板的一般情况:

$$D^e = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_i' \left[\left(h' - \sum_{k=0}^{i-1} h_k \right)^3 - \left(h' - \sum_{k=0}^i h_k \right)^3 \right] \quad (13)$$

同样,可推算出折算弹性模量和泊松比:

$$\nu_b^e = \frac{1}{3D^e} \sum_{i=1}^n E_i' \nu_i \left[\left(h' - \sum_{k=0}^{i-1} h_k \right)^3 - \left(h' - \sum_{k=0}^i h_k \right)^3 \right] \quad (14)$$

$$E_b^e = \frac{12D^e(1 - \nu_b^e \nu_b^e)}{h^3} \quad (15)$$

1.4 膜力等效导出薄膜应力折算弹性模量

现考虑膜力情况 下述应力可认为是膜应力 e_m , 以区别于弯曲应力 e_b 根据膜力等效原则:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \sum_{i=1}^3 N_{xi} \\ N_y &= \sum_{i=1}^3 N_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

我们有下式:

$$\left. \begin{aligned} e_x h &= \sum_{i=1}^3 e_{xi} h_i \\ e_y h &= \sum_{i=1}^3 e_{yi} h_i \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将胡克定律 (2) 代入上式, 由平截面假定, 应变分量 X , Y 各层相同与 z 无关得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_m^e h}{1 - \nu_m^e \nu_m^e} (X + \nu_m^e Y) &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (X + \nu_i Y) \\ \frac{E_m^e h}{1 - \nu_m^e \nu_m^e} (Y + \nu_m^e X) &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (Y + \nu_i X) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

将 (18) 两式相加 相减, 整理得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_m^e h}{1 - \nu_m^e} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i} = a \\ \frac{E_m^e h}{1 + \nu_m^e} &= \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 + \nu_i} = b \\ (1 - \nu_m^e) a &= (1 + \nu_m^e) b \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

解得:

$$\nu_m^e = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i \nu_i}{1 - \nu_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2}} \quad (20)$$

于是有:

$$E_m^e = \frac{1 - \nu_m^e}{h} \cdot a = \frac{1 - \nu_m^e}{h} \sum_{i=1}^n \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i} \quad (21)$$

1.5 非对称多层薄板各层应力

用有限元方法将折算弹性参数用于板壳单元, 通过计算得到各单元挠度、曲率、转角、位移应变等形变量。那么多层板第 i 层中弯曲应力分量可由上述计算结果通过下列公式给出

$$\left. \begin{aligned} e_{xi}^b &= - \frac{E_i z}{1 - \nu_i^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x^2} + \nu_i \frac{\partial w}{\partial y^2} \right\} \\ e_{yi}^b &= - \frac{E_i z}{1 - \nu_i^2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial w}{\partial x^2} \right\} \\ e_{xyi}^b &= - \frac{E_i z}{1 + \nu_i} \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

第 i 层中薄膜应力则可由下式决定:

$$\left. \begin{aligned} e_{xi}^m &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2}(X_x+\nu_i X_y) \\ e_{yi}^m &= \frac{E_i}{1-\nu_i^2}(X_y+\nu_i X_x) \\ \mu_{xyi} &= \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}\nu_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

2 具体实例

2.1 三层地壳模型的弯曲内力

将 30km厚的地壳分为上、中、下 3 层(图 1)。各层厚度和根据文献^[5]中地壳各层纵、横地震波速推算的弹性参数见下表:

表 1 三层地壳模型岩石力学参数表

Table 1 The rock mechanical property of the three-layer crustal model

层号	层厚		弹簧 $E \times 10^5$ (kg/cm ²)	泊松比 (ν)	密度 d (g/cm ³)	纵波速度 V_p (km/s)
	km	h_i/h				
1	12	0.4	6.32	0.25	2.6	5.4
2	8	0.27	5.96	0.26	2.7	5.2
3	10	0.33	8.83	0.26	3.0	6.0

视目标区为长宽各 3000km的方板,水平长、宽与厚度比为 100:1。从上表参数可知,模型是一个典型的三明治结构,两层刚性较强的地层夹着一层较软弱的地层。由于几何形状和受力、约束状况的对称性,只取四分之一面积进行有限元分析计算(图 2),当受到自下而上垂直于板面的力作用时,板发生挠曲。此例可用于模拟地幔上涌引起地壳弯曲,使地表产生拉张的构造现象。

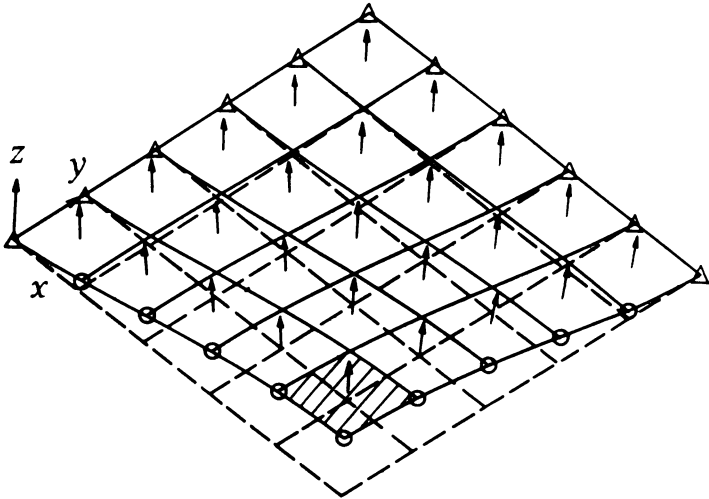


图 2 三层薄板有限元计算模型 I及挠曲

Fig. 2 Model I for a three-layer plate in the finite-element calculation and its deflection

将表中各层厚度和弹性参数代入公式 (7) 中, 首先求出中性面与板底之间的距离, $e=13.77\text{km}=0.46h$; 然后代入 (13)、(14)、(15) 式中, 求出等效弹性参数

$$D^e = 0.66 \times 10^5 \times h^3$$

$$\nu_b^e = 0.255$$

$$E_b^e = 7.52 \times 10^5$$

将折算的弹性参数作为均匀板的模量输入有限元计算程序, 获得中性面各节点的挠度、转角及各单元弯曲应力。图 2 中, 虚线网格表示均匀板变形前状态, 实线为变形后挠曲形态。图 3 给出了各单元上表面弯曲应力 σ_x^e 等值线。

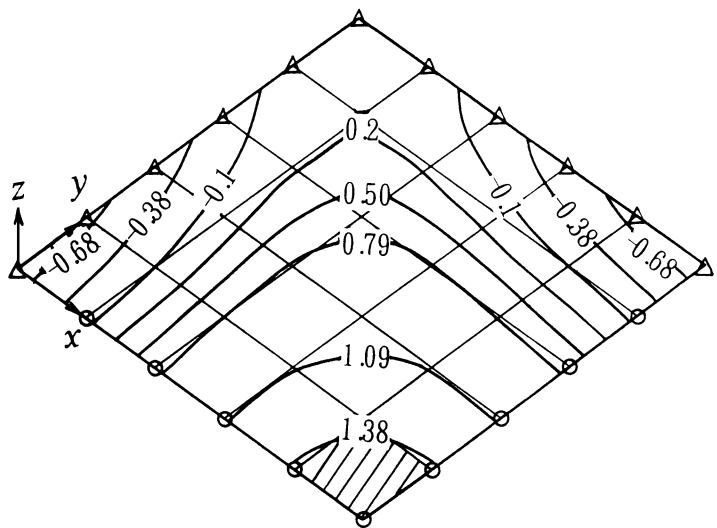


图 3 三层薄板上表面等效弯曲应力 σ_x^e 等值线

Fig. 3 Contours of effective bending stress σ_x^e on upper surface of the plate

最后, 我们根据有限元计算结果推算出图 2 中划阴影单元各分层应力 σ_{xi} 。从图 4 中可以

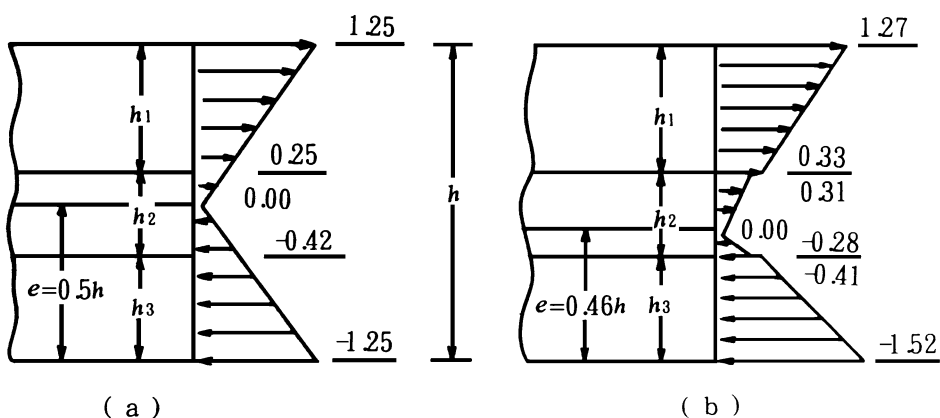


图 4 三层薄板阴影单元截面弯曲应力

Fig. 4 Bending stress in the section of the shaded element of the plate

a. 等效应力 σ_x^e ; b. 分层应力 $\sigma_{xi} (i=1, 2, 3)$

看出,各分层应力和等效应力是有区别的。尤其是在弹模相差较大时,所引起的各层应力差异是相当可观的。

2.2 三层地壳模型的薄膜内力

地壳模型同上例,当受到平行于中性面无偏心距的水平外力作用(图5),板内产生膜应

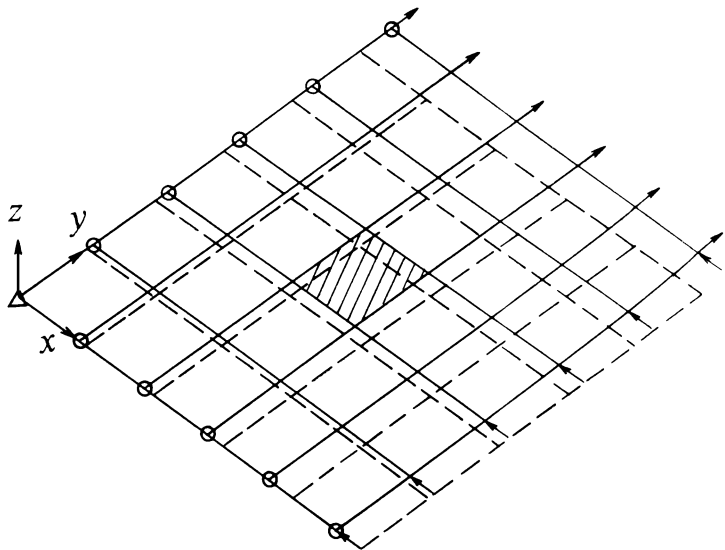


图 5 三层薄板有限元计算模型II 及位移

Fig. 5 ModelII for a three-layer plate in the finite-element calculation and its displacement

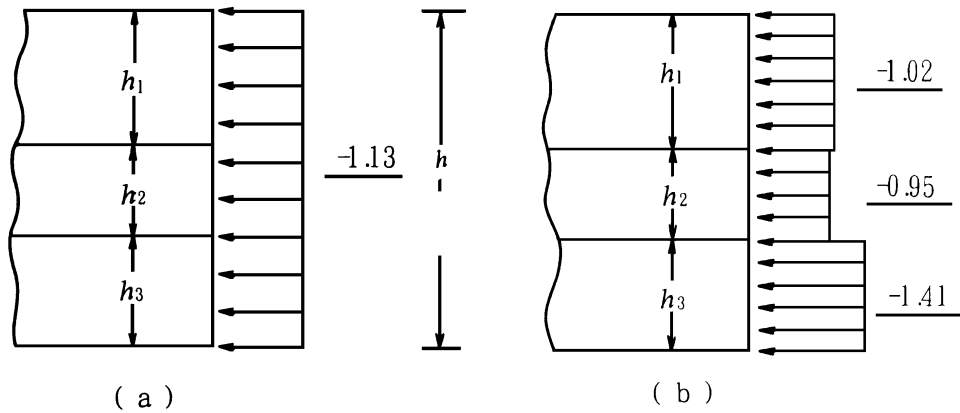


图 6 三层薄板阴影单元截面薄膜应力

Fig. 6 Membrane stress in the cross section of shaded element of the plate

a. 等效应力 σ_e ; b. 分层应力 $\sigma_i (i=1, 2, 3)$

力。假设 x 方向受单位压力, y 方向受单位拉力, 平板处于纯剪切状态。这时中性面距离为 $e=15\text{km}=0.5h$, 不受各层参数影响。先利用 (20)、(21) 式求出薄膜力情况下的等效弹性模量 $E_m^e=7.06\times 10^6$ 和泊松比 $\nu_m^e=0.256$, 然后将这些参数输入有限元计算程序, 算得水平力作用下

平板的等效膜应力、应变和位移。图 5 给出薄板位移前后的位置。一旦得到了等效位移和应变,就可根据 (23) 式求出各分层膜应力。从图 6 可以清楚地看出,弹性系数较低的低速层承受应力的能力低于弹模高的上、下地壳。部分应力波被高波速的能干层所吸收,并在层间发生应力间断。

最后,需要强调说明的是:现有的有限单元结构分析程序中的板壳单元应力是弯曲与膜的耦合应力,而在应用作者给出的公式计算等效弹模要区分弯曲和补偿膜的弹模,并且最好将二者处理为统一的等效模量代入板壳单元。

本文是在北京大学王仁教授和邓成光教授的悉心指导和修正下完成的,王薇同志清绘了所有图件,在此一并表示诚挚的谢意!

参 考 文 献

- 1 C.Г.列赫尼茨基,各向异性板。北京:科学出版社,1963
- 2 吴连元,板壳理论。上海:上海交通大学出版社,1989
- 3 徐芝纶,弹性力学。北京:人民教育出版社,1980
- 4 王仁等,固体力学基础。北京:地质出版社,1979
- 5 中国大百科全书地球物理卷,北京:中国大百科全书出版社,1989
- 6 Timoshenko S P, Theory of plates and shell, McGraw-Hill Book Company Limited, 1959.
- 7 Zienkiewicz O C, The finite element mothod, 3rd. edition, McGraw-Hill Book Company Limited, 1977.

DISCUSSION ON THE EFFECTIVE ELASTIC MODULI IN THE UNSYMMETRICAL MULTI-LAYER PLATE

W u Hongling

(*Institute of Geomechanics, CAGS*)

Abstract In order to adapt plate and shell models in applying the finite element method to tectonic analysis problems in representing crustal layer, this paper relaxes the symmetrical restrictions on the geometry and elasticity in the multi-layered structure. According to the effective principle we re-determine the location of the neutral plane of the plate, which is no longer in the middle of the plate as in the symmetrical case. General expressions for effective bending stiffness and elastic moduli are given, they are expressed in terms of each layer's thickness and elastic moduli of the plate. Two examples are given for three-layer crustal model. We also discuss the difference between the effective bending or membrane stress distribution and those obtained by treating each layer in their own moduli.

Key words unsymmetrical multi-layer plate, effective modulus, effective stress, layered stress

第 一 作 者 简 介

武红岭,女,1948年生,副研究员。1977年毕业于北京大学力学系固体力学专业。1983年毕业于北京大学地质系地质力学专业,获硕士学位。主要从事地球动力学、岩石力学和构造应力场的数值模拟研究工作。通讯地址:北京市海淀区民族学院南路11号地质力学研究所。邮政编码:100081