

太沙基方程 Laplace 解

张 琦, 王生志, 徐大地

(辽宁省化工地质勘察院, 辽宁 锦州 121000)

摘 要: 根据饱和土单向渗透固结的特殊规律, 以外荷一次性施加, 初始超静水压 u_0 等于常数, 顶面透水, 用底部超静水压力 u 在任意时刻为有限值这个事实, 代替底部边界排、隔水条件等简化假定, 作为简单情况下太沙基单向固结微分方程的初始和边界条件. 对太沙基单向固结微分方程进行拉氏积分变换求解. 得到超静水压力 u 、固结度 U 、平均固结度 $\bar{U}$ 结论式. 客观地反映了土层固结过程中 u 、 U 、 $\bar{U}$ 随 Z 、 t 的变化规律, 且形式简洁, 使用方便, 有效可行.

关键词: 太沙基方程 拉氏积分 土的固结理论

中图分类号: P614.2

文献标识码: A

自从太沙基建立单向固结微分方程以来, 它在土的固结理论和生产实践中就一直占据中心地位. 尽管后来土的固结理论得到了进一步发展, 如比奥的三向固结理论, 太沙基-伦杜立克扩散理论以及非饱和土的巴登、傅累德伦德理论等, 但它的作用仍然不容忽视. 究其原因有: 其一, 它的求解相对容易, 解答形式相对简单; 其二, 经过一百多年的使用, 已积累了丰富的经验. 而后来各种理论求解过程大部分都相当繁琐, 解答形式过于复杂, 使从事实际工作者望而生畏. 因此对于太沙基方程的研究尚有实际意义.

1 问题的提出

太沙基单向固结微分方程(下称太沙基方程)经典解答是据饱和土单向渗透固结的特殊规律, 以顶面透水、底面隔水、水流单向向上垂直渗流, 或顶、底面均透水, 水流以土层中部作上下对称垂直渗流为边界条件等简化假定求得的. 然而这两种条件只是自然界的个别情况, 一般土层与之并不相符. 因为所谓的隔水或透水是相对而言的, 自然界并不存在固结时的渗流量 $q = 0$ ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $q = \frac{k \partial u}{\gamma_w \partial z} = 0$) 的绝对隔水界面, 它或多或少地都要产生渗流, 只是 q 相对较小而已. 因此一般情况下土层并不作单纯的向上垂直渗流. 可视为透水的土层或基底界面一般不是自由排水, 同为透水的不同界面其单位渗流量一般不相等. 有的土层顶、底面虽然都可看作透水界面, 但因顶、底端的排水条件的不同, 其单位渗流量并不相等, 因此不可能对称于土层中界面作上下对称渗流. 由上所述作者认为固结过程中

水流作不对称于中界面的上下垂直渗流(忽略侧向渗流)其上下分界面的位置依顶、底面的排水条件决定(如图 1 所示).

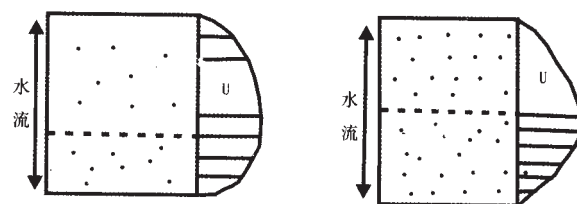


图 1 顶底排水条件不一致时的垂直渗流
上下分界面位置示意图

Fig. 1 Sketch showing the dividing faces of vertical seepages with different drainage conditions of top and bottom

正确确定土层界面的排水条件十分困难, 尤其是底部界面条件. 为了求得相对符合实际的解答, 作者避开底部界面排、隔水条件这个棘手问题, 而用固结过程中底部超静水压力始终为有限值这个事实代替之, 用拉氏积分变换法求解太沙基方程.

2 问题求解

根据饱和土单向渗透固结的特殊规律, 以外荷一次性施加, 顶面透水, 底部 $u < +\infty$, 初始超静水压 u_0 等于常数等简化假定为研究课题, 其方程及对于简单情况下的初始和边界条件如下:

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

当 $t = 0$, $0 \leq Z \leq H$ 时, $u = u_0 = \text{常数}$;

$0 < t < \infty, Z=0$ 时, $u=0$;

$0 < t < \infty, Z=H$ 时, $u < +\infty$

式中: $C_v = \frac{K(1+e)}{\alpha\gamma_w}$

对 (1) 取拉氏变换得: $C_v \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial Z^2} = S\bar{u} - u_0$ (2)

注: (2) 为 (1) 对参变量 t 取拉氏变换, 并已利用 $u = u_0$ 条件. $\bar{u}$ 为 u 取拉氏变换象函数.

解 (2) 式得:

$$\bar{u}' = C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right) + C_2 \exp\left(\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right)$$

$$\bar{u}'' = \frac{u_0}{S}$$

$$\bar{u} = u + u''$$

$$\bar{u} = C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right) + C_2 \exp\left(\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right) + \frac{u_0}{S} \quad (3)$$

当 $Z \rightarrow \infty$ 时,

$$\bar{u} = 0 + C_2 \exp\left(\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right) + \frac{u_0}{S} \rightarrow \infty$$

与底部边界条件不符, 故有 $C_2 = 0$, 因此 (2) 式的解为

$$\bar{u} = C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right) + \frac{u_0}{S} \quad (4)$$

当 $Z=0$ 时, $\bar{u}=0$, 代入 (4) 式得

$$\bar{u} = C_1 + \frac{u_0}{S}; C_1 = -\frac{u_0}{S}$$

将 C_1 代回 (4) 式得:

$$\bar{u} = \frac{u_0}{S} [1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{S}{C_v}} Z\right)] \quad (5)$$

将 (5) 式取拉氏逆变换得:

$$u = u_0 [1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{Z}{2\sqrt{C_v t}}\right)] \quad (6)$$

由 $1 - \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erf}(x)$,

(6) 式又可写成:

$$u = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{2\sqrt{C_v t}}\right) \quad (7)$$

注: $\operatorname{erf}(x)$ 为误差函数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $\operatorname{erfc}(x)$

为余误差函数.

考虑到人们习惯用 Z/H 和时间因素 T_v 表示 u , 将 (7) 式右边括号分子, 分母同乘以固结土层厚度之倒数 $1/H$ 得:

$$u = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}\right) = u_0 [1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}\right)] \quad (8)$$

对于生产实际土层的固结度 U 和平均固结度 $\bar{U}$ 更有意义.

由 $U = \frac{u_0 - u}{u_0} = 1 - \frac{u}{u_0}$ 得

$$U = u_0 \operatorname{erf}\left[\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}\right] = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}\right) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{H} \int_0^H U dZ = \frac{1}{H} \int_0^H [1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}\right)] dZ \\ &= \frac{1}{H} \int_0^H \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{Z/H}{2\sqrt{T_v}}} e^{-t^2} dt\right) dZ \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式经积分运算并整理得:

$$\bar{U} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{T_v} [1 - \exp\left(-\frac{1}{4T_v}\right)] + \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{T_v}}\right) \quad (11)$$

3 解答分析与讨论

为了检查解答的正确性, 根据 (8)、(9)、(11) 式作出各种曲线图 (图 2、图 3).

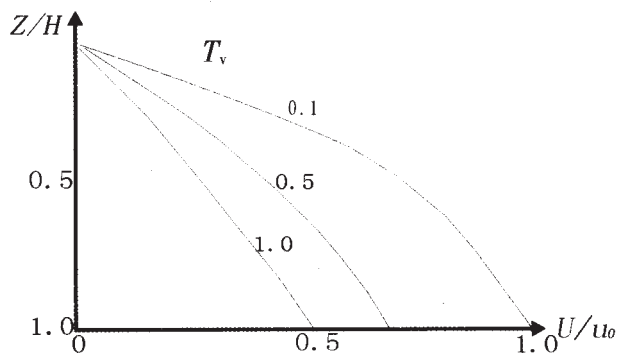


图 2 $Z/H - u/u_0$ 曲线

Fig. 2 Curve of Z/H vs. u/u_0

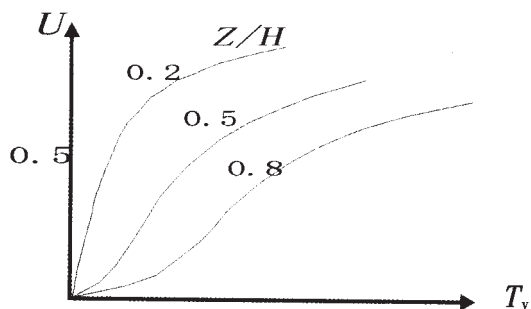


图 3 $U - T_v$ 关系曲线

Fig. 3 Correlation curve of U vs. T_v

图 2 为 T_v 分别为 0.1、0.5、1.0 三值时的 $Z/H - u/u_0$ 曲线,从曲线的形态可知, $T_v = 0.1$ 时, $\frac{\partial u}{\partial Z}$ 最大; $T_v = 0.5$ 时, $\frac{\partial u}{\partial Z}$ 次之; $T_v = 1.0$ 时, $\frac{\partial u}{\partial Z}$ 最小. 据此可得出如下结论:在固结过程中,水头梯度随着 T_v 的增加而减小,又由达西定律水渗流速度与水头梯度成正比,故水流速度随 T_v 成反比. 即土体在固结初期,固结速度快,随后,随 T_v 的增大而渐渐地变慢,这与土的固结机理相符.

图 3 为 Z/H 为 0.2、0.5、0.8 时 U 与 T_v 关系曲线. 从曲线形态可以看出 $Z/H = 0.2$ 时,固结度 U 很快就

发展到一个相当大的值,随后进入减速增长阶段. $Z/H = 0.5$ 时,起始阶段 U 随 T_v 缓慢增长,经过一个短暂过程后,转变为快速增长;增长到一定程度后,又转变为慢速增长. $Z/H = 0.8$ 时,起始缓慢增长段比 $Z/H = 0.5$ 时长,而快速增长段又比 $Z/H = 0.5$ 时短,整个曲线呈现较明显的 3 个发展阶段. 由此得出如下结论:①固结土层在不同深度处,固结度 U 的发展过程不同;②越靠近顶部固结度 U 增长越快,反之越慢;③到整个土层完成固结需要相当长的时间.

用本文解答式 (11) 计算了若干个 T_v 值的平均固结度 $\bar{U}$ (见表 1).

表 1 T_v 值平均固结度 ($\bar{U}$) 表
Table 1 Average consolidation degree ($\bar{U}$) of T_v

T_v	0.002	0.005	0.01	0.05	0.1	0.5	1.0	5.0	10.0	100.0
$\bar{U}$	0.050	0.080	0.112	0.250	0.342	0.631	0.729	0.875	0.918	0.944

根据表 1 数据作出曲线如图 4.

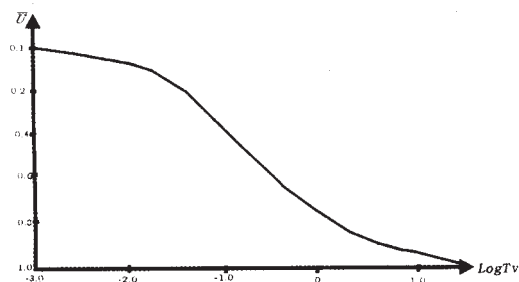


图 4 $\bar{U} - \log T_v$ 曲线

Fig. 4 Curve of $\bar{U}$ vs. $\log T_v$

该 $\bar{U} - \log T_v$ 曲线与太沙基-伦杜立克扩散理论和比奥的三向固结理论求得的 $\bar{U} - \log T_v$ 曲线相似,说明公式 (11) 能反映平均固结度 $\bar{U}$ 和时间因素 T_v 之间的关系.

从以上分析可以得出,结论公式 (8)、(9)、(11) 能够反映土层固结过程 u 、 U 、 $\bar{U}$ 随 Z 、 t 的变化规律.

4 结论

(1) 本文以外荷一次性施加、顶面透水、底部 $u < +\infty$ 、 u_0 为常数,作为太沙基单向固结微分方程的初始和边界条件,比较切合实际.

(2) 对太沙基单向固结微分方程进行拉氏积分变换,方法正确;所求得的 u 、 U 、 $\bar{U}$ 结论式,客观地反映了土层固结过程中 u 、 U 、 $\bar{U}$ 随 Z 、 t 的变化规律,且形式简洁,使用方便,有效可行.

参考文献:

- [1] 黄文熙. 土的工程性质 [M]. 北京: 水力电力出版社, 1983.
- [2] 杨英华. 土力学 [M]. 北京: 地质出版社, 1987.
- [3] 陈希哲. 土力学地基基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.

(下转第 108 页)

斜发沸石为主,丝光沸石少量。矿石纯度高,结构稳定,对阳离子吸收能力较强。成母岩化学成分与沸石矿物一致,低 Si 高 Ca、Al 是其最大特点。火山玻璃脱玻化是形成沸石矿物的主要原因。矿床成因属淡水湖火山碎屑岩喷发—沉积矿床,部分为地下水珍珠岩蚀变型矿床。

参考文献:

- [1] 黑龙江省地质矿产第四调查研究所. 黑龙江省嫩江县大石砬子沸石矿地质特征 [A]. 东北三省地质学会地质矿产学术讨论会论文摘要汇编 [C], 1983.
- [2] 王国臣. 黑龙江省嫩江县大石砬子沸石矿床地质特征及沸石应用研究 [J]. 辽宁地质科技情报, 1986, (1).

THE GEOLOGICAL CHARACTERISTICS AND FORMING-MECHANISM OF THE DASHILAZI ZEOLITE DEPOSIT IN HEILONGJIANG PROVINCE

YUE Bang-jiang, LU Jun, WANG Jian-min, LIU Bao-shan

(Qiqihar Branch, Heilongjiang Institute of Geological Survey, Qiqihar 161005, China)

Abstract: Based on previous studies, this paper summarizes the geological characteristics of the Dashilazi zeolite deposit. The ore is classified into 5 types. Testing on its physical and chemical natures shows that the texture of zeolite ore is stable, with a strong adsorption capability to anion. By discussing on its environment, source of material and its forming-mechanism, the Dashilazi zeolite deposit is of volcanic-sedimentary origin.

Key words: Dashilazi; zeolite; geological characteristics; mechanism; volcanic-sedimentary deposit

作者简介: 岳邦江(1951—),男,高级工程师,1975年毕业于长春地质学院综合找矿专业,多年来一直从事金属及非金属矿产普查及勘探工作,通讯地址 黑龙江省齐齐哈尔市龙沙区德被胡同 39 号 黑龙江地质调查院齐齐哈尔分院,邮政编码 161005.

(上接第 128 页)

THE LAPLACE SOLUTION OF TERZAGHI EQUATION

ZHANG Qi, WANG Sheng-zhi, XU Da-di

(Liaoning Institute of Chemical Geological Survey, Jinzhou 121000, China)

Abstract: The Terzaghi unidirectional consolidation differential equation has long been dominant in the soil consolidation theory and practices. Its classical solution is on the basis of the ideal boundary conditions, which do not accord with those of the common soil layers. Based on the special regularity of the unidirectional permeation and consolidation of saturated soil, this paper avoids the conditions of drainage and impermeation at the bottom boundary, in a simplified assumption for initial and boundary conditions, to find the alternative Laplace solution for the Terzaghi unidirectional consolidation differential equation. A conclusive formula about the excess hydrostatic pressure u , consolidating degree U and average consolidating degree $\bar{U}$ is obtained. The analysis and discussion on the solution by corresponding curves have concluded that the assumption for initial and boundary conditions is practical and the conclusive formula objectively reflects the regularity of soil consolidating process.

Key words: Terzaghi equation; Laplace integral; theory on soil consolidation

作者简介: 张琦(1964—),男,辽宁锦州人,工程师,1989年毕业于长春地质学院水文地质工程地质专业,主要从事水、工、环地质调查工作,通讯地址 锦州市文兴里 34 号,邮政编码 121000, E-mail//Lnyzq@tom.com