

用降落漏斗体積法求潛水含水層中 抽水时之影响半徑

潘 天 杭

过去求影响半徑 R 的公式最常用的有三:

$$\ln R = \frac{Q}{\pi K (H^2 - h^2)} + \ln r \quad (1)$$

$$R = \sqrt{\frac{6 H K T}{\mu}} \quad (2)$$

$$R = \sqrt{\frac{12 T}{\mu}} \sqrt{\frac{q K}{\pi}} \quad (3)$$

但以上三式都是不完善有缺点的: 首先利用 (1) 式求 R 时必须知道 K , 但是在 R 未知之情况下, 求 K 用單孔抽水是不够的, 必須布置观测孔, 这就是說至少需要二个鑽孔。此外 (1) 式由于鳩布依公式的近似性質以及水躍等的影响, 求得之 R 值是不精确的。而 (2) 式 (3) 式同样皆需要先求 K , 并且 (2) 式没有考虑抽水量对 R 的影响, (2) 式 (3) 式再一个共同的缺点是 $T \rightarrow \infty$ 时 $R \rightarrow \infty$, 这是不合理的。

現在作者提出用降落漏斗体積法來求潛水含水層中抽水时之影响半徑 R 。作者的推導首先以下列五个假設条件为前提:

- (1) 潛水含水層底板水平, 岩性均質;
- (2) 抽水前潛水面水平;
- (3) 含水層面積較大, 水量丰富, 以致于單孔抽水的結果对含水層厚度的变化微乎其微;
- (4) 滲入补給量与潛水蒸發量等于零或兩者成动态平衡;
- (5) 鑽孔为完整井。

如果某單孔進行抽水, 降低为 S , 当穩定后停止抽水, 并記下時間 T_1 , 以后孔中水位逐漸升高至 $S=0$ 为止, 記下达到 $S=0$ 之時間为 T_2 , 顯然在 $T_1 \rightarrow T_2$ 時間內降落漏斗內的潛水运动 是非穩定 流形式, 因此符合微分方程:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{KH}{\mu} \times \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (5)$$

而在 $T_1 \rightarrow T_2$ 之時間內, 任何時刻的湧水量 Q 应符合布西涅斯克方程:

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \quad (6)$$

Q_0 —— T_1 時刻之湧水量。

t ——由 T_1 時刻算起的时间。

α ——系数。

这是因为布西涅斯克之方程式 (6) 是从 (5) 式積分出來的。

事实上 (6) 式也可以在这样一个假設下得出: 即鑽孔水位恢复过程中單位時間內之湧水量减少值与該時刻之鑽孔湧水量和水位恢复后之湧水量之差成正比:

$$-\frac{dQ}{dt} \propto (Q - 0)$$

$$\therefore -\frac{dQ}{dt} = \alpha Q$$

積分后得: $\ln Q = -\alpha t + \ln c$

$$Q = c e^{-\alpha t}$$

根据原始条件 $t=0$ 时 $c=Q_0$

$$\text{則 } Q = Q_0 e^{-\alpha t}$$

这种情况說明鑽孔中湧水量随時間之变化正如灼热物体在空气中冷却之情形一样。

欲求得 $T_1 \rightarrow T_2$ 过程中饱和漏斗体積之总水量应將 (5) 式对 t 積分即得:

$$\begin{aligned} Q_{\text{总}} &= \int_{T_1}^{T_2} Q_0 e^{-\alpha t} dt = Q_0 \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_{T_1}^{T_2} \\ &= \frac{1}{\alpha} Q_0 [e^{-\alpha T_1} - e^{-\alpha T_2}] \end{aligned}$$

$$\text{顯然: } Q_{\text{总}} = \mu V + 2\pi r_0 (H - H_n) \quad (7)$$

μ ——岩層給水度;

V ——当降深为 S 时之漏斗的体積;

H_n ——降深 S 时鑽孔中之水柱高 $= H - S$ 。

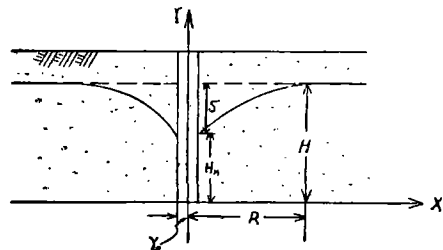


圖 1

V 实际上就是以 y 为軸之潛水浸潤曲綫上之迴轉体体积。

$$V = \int_{H_n}^H \pi x^2 dy$$

$$\therefore y^2 - H_n^2 = 2 \frac{q}{K} (x - r_0)$$

$$\therefore x = r_0 + \frac{K}{2q} (y^2 - H_n^2)$$

$$V = \pi \int_{H_n}^H \left[r_0 + \frac{K}{2q} (y^2 - H_n^2) \right]^2 dy$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left[r_0^2 (H - H_n) + \frac{r_0 K}{2q} (y^2 - H_n^2) \right. \\ &+ \frac{r_0 K}{q} H_n (H - H_n) + \frac{K^2}{2q^2} (H^5 - H_n^5) \\ &+ \left. \frac{K^2}{4q^2} H^4 (H - H_n) - \frac{K^2}{6q^2} H_n^2 (H^3 - H_n^3) \right] \\ &= \pi \left[r_0^2 (H - H_n) + \frac{2}{3} \frac{r_0 (R - r_0)}{H^2 - H_n^2} (H^3 - H_n^3) \right. \\ &- \frac{2r_0 (R - r_0)}{H^2 - H_n^2} H_n (H - H_n) \\ &+ \frac{(R - r_0)^2}{5(H^2 - H_n^2)^2} (H^5 - H_n^5) \\ &+ \frac{(R - r_0)^2}{(H^2 - H_n^2)^2} H_n^4 \\ &- \left. \frac{2(R - r_0)^2}{3(H^2 - H_n^2)^2} H_n^2 (H^3 - H_n^3) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V = \pi \left\{ (R - r_0)^2 \left[\frac{H^5 - H_n^5}{5(H^2 - H_n^2)^2} + \frac{H_n^4}{(H^2 - H_n^2)^2} - \frac{2H_n(H^3 - H_n^3)}{3(H^2 - H_n^2)^2} \right] \right. \\ + (R - r_0) \left[\frac{2r_0(H^5 - H_n^5)}{3(H^2 - H_n^2)^2} \right. \\ \left. \left. - \frac{2r_0 H_n (H - H_n)}{H^2 - H_n^2} + r_0^2 (H - H_n) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{設 } A = \pi \left[\frac{H^5 - H_n^5}{5(H^2 - H_n^2)^2} + \frac{H_n^4}{(H^2 - H_n^2)^2} - \frac{2H_n(H^3 - H_n^3)}{3(H^2 - H_n^2)^2} \right]$$

$$B = \pi \left[\frac{2r_0(H^3 - H_n^3)}{3(H^2 - H_n^2)} - \frac{2r_0 H_n (H - H_n)}{H^2 - H_n^2} \right]$$

$$C = \pi r_0^2 (H - H_n)$$

代入(7)式

$$Q_{\text{总}} = \mu [A(R - r_0)^2 + B(R - r_0) + C] + 2\pi r_0 (H - H_n)$$

$$A(R - r_0)^2 + B(R - r_0) + \left[C - \frac{Q_{\text{总}} - 2\pi r_0 (H - H_n)}{\mu} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} &A(R - r_0)^2 + B(R - r_0) + \left[C - \frac{\frac{1}{\alpha} Q_0 (e^{\alpha T_2} - e^{\alpha T_1}) - 2\pi r_0 (H - H_n)}{\mu} \right] = 0 \\ &- \beta \pm \sqrt{B^2 - 4A[C - \frac{1}{\alpha} Q_0 (e^{\alpha T_2} - e^{\alpha T_1}) - 2\pi r_0 (H - H_n)]} \end{aligned}$$

$$\text{解之: } R = r_0 + \frac{\frac{1}{\alpha} Q_0 (e^{\alpha T_2} - e^{\alpha T_1}) - 2\pi r_0 (H - H_n)}{2A} \quad (8)$$

取其正根, 因为影响半径不能是負的。

式(8)只要單孔即可求 R , 因此也就能够單孔抽水求 K 了, 比起(1)式可以節約觀察孔。并且也可避免(2)、(3)公式中所存在的缺点。

式(8)中不包括 K 在內, 这是因为 μ 与 K 在某种意义上有相同的性質, 如 μ 小, K 亦小, μ 大 K 亦大。 K 之物理意义已由(8)式中 μ 所代替。

式(8)中之 α 亦即(4)(5)式中之 α 可用下式

$$\alpha = \frac{\ln Q_0 - \ln Q_1}{t} \text{ 求之} \quad (9)$$

Q_0 ——降低 S 时之湧水量;

Q_1 ——降低 S_1 时之湧水量 ($S_1 < S$);

t ——降低从 S 减少至 S_1 时所經歷之時間。

Q_0, Q_1 可自抽水記錄資料中獲得, t 靠停止抽水后水位恢复过程中观察獲得。

式(8)在应用上系数 A, B, C 虽然复雜, 但是可通过作計算圖表方法一劳永逸地解决之, 如果 $R \gg r_0$ 可令 $r_0 = 0$ 則更能簡化計算。

应该指出, 以上僅是理論上的推導并沒有任何实验根据, 希望我國的水文地質学者在實踐中加以驗証。