DOI:10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.1982.03.019

地下水水质的数学模拟

（三）

水动力弥散方程的解析解法及其应用

山东大学　孙讷正

在第二讲中我们用空间平均方法导出了水动力弥散方程。由于它的复杂性，只有在极为理想的条件下才能求得解析解，一般的实际问题都要靠数值方法求解。尽管如此，研究水动力弥散方程的解析解法仍然是非常必要的，不仅各种数值方法要靠解析解进行检验和比较，而且我们还可以根据解析解的适用条件设计室内或野外试验，然后利用公式计算或配合标准曲线来确定水动力弥散系数。

水动力弥散方程的定解条件

当流场已知时，水动力弥散问题的解就是未知的浓度分布$c(\boldsymbol{x},t)$。要确定这个解，必须具备以下的条件。

1．给定浓度分布的空间区域R和时间区间$[0,T]$。

2．建立浓度分布$c(\boldsymbol{x},t)$所应满足的水动力弥散方程，即第二讲中方程(23)

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(D_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial x_i}(cV_i)+I \tag{1}$$

3．确定水动力弥散方程中的系数，包括在R上给定弥散度α_L和α_T和平均流速向量$\boldsymbol{V}$（对于非稳定流动要求知道平均流速向量随时间的变化）以及源汇项I。

4．给出方程的定解条件。

初始条件　在区域R上给定浓度的初始分布，

$$c(\boldsymbol{x},o)=c_0(\boldsymbol{x})\qquad \boldsymbol{x}\in(R) \tag{2}$$

其中$t=0$是任意选定的初始时刻，$c_0(\boldsymbol{x})$是位置的已知函数。

边界条件　在区域R的边界B上给定，通常有两种类型，一种是已知浓度的边界条件，即

$$c(\boldsymbol{x}_B,t)=f(\boldsymbol{x}_B,t);\qquad 0<t<T \tag{3}$$

其中$\boldsymbol{x}_B$是边界面B上的点，$f(\boldsymbol{x}_B,t)$是已知函数。另一种是已知溶质通量的边界条件，即

$$\left(cV_i-D_{ij}\frac{\partial c}{\partial x_j}\right)n_i\Big|_{\boldsymbol{x}_B}=g(\boldsymbol{x}_B,t);\qquad 0<t<T \tag{4}$$

其中n_1、n_2、n_3是曲面B在点$\boldsymbol{x}_B$处的单位外法线向量的分量，$g(\boldsymbol{x}_B,t)$是已知函数。注意，在（4）式中使用了求和约定。为便于理解起见，现仅列举几种常见的一维问题的边界条件的具体形式：

a．多孔介质α的边界外为另一多孔介质β，因为穿过边界的溶质通量应保持连续，所以有：

$$\left(cV-D_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Big|_{\alpha}=-\left(cV-D_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Big|_{\beta} \tag{5}$$

b．多孔介质的边界外为不透水岩层，此时通过边界的流量与溶质通量均为零，由于在边界上有　$cV-D_L\frac{\partial c}{\partial x}=0$及$V=0$，故得边界条件：

$$\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{\boldsymbol{x}_B}=0 \tag{6}$$

c．多孔介质的边界外为浓度固定为c_r的河水，由连续性，在边界点上应成立

$$\left[\left(cV-D_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)-\left(c_rV-D_d\frac{\partial c}{\partial x}/n\right)\right]=0$$

若忽略分子扩散，则有

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left(c-c_r-\alpha_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Bigg|_{x_B}=0 \tag{7}$$

经一段时间后，会出现 $c\Big|_{x_B}=c_r$，于是由上式得 $\frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{x_B}=0$

d. 多孔介质的边界外为空气，由于此时边界两侧的浓度相等，故仍得边界条件（6）。

水动力弥散方程在正交曲线座标系中的形式

设（x_1,x_2,x_3）为点p在直角座标系中的座标，（u_1,u_2,u_3）是同一个点在某曲线座标系中的座标，二者的联系是：$x_i=g_i$（u_1,u_2,u_3），$i=1,2,3$。若曲线座标系的三条座标曲线在任何点处都是正交的，则称它为正交曲线座标系。令 $h_i=|\partial r/\partial u_i|$（$i=1,2,3$），式中$r$为向径，$h_i$称为尺度因子。在正交曲线座标系中任何向量$\boldsymbol{A}$的散度有下列表达式：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{8}$$

其中A_1,A_2,A_3是向量$\boldsymbol{A}$在该曲线座标系中的分量。关于div(gradϕ)的表达式等内容可参考高等数学教科书的有关场论部份。现在设正交曲线座标系的三个轴在任何点处都与弥散系数张量的主轴同向，例如设u_1轴与流速方向一致，u_2和u_3轴都与它垂直，则对于各向同性介质，由第二讲（19）式知

$$D=\begin{bmatrix}\alpha_LV+D_dT & 0 & 0\\ 0 & \alpha_TV+D_dT & 0\\ 0 & 0 & \alpha_TV+D_dT\end{bmatrix}$$

并且 $V_1=V$，$V_2=V_3=0$，在这样的条件下，由方程（1）（略去了源汇项）可得出正交坐标系中的相应表达式。下面是最常用的几个特例：

（1）**柱座标系** $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$；此时$h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=1$，方程为：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\alpha_LV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(\alpha_TV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial\theta}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[(\alpha_TV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial z}\right]$$
$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rcV) \tag{9}$$

（2）**球座标系** $x=r\sin\theta\cos\phi$，$y=r\sin\theta\sin\phi$，$z=r\cos\theta$；此时 $h_1=1$，$h_2=r$，$h_3=r\sin\theta$，相应的水动力弥散方程为：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(\alpha_LV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta(\alpha_TV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial\theta}\right]$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[(\alpha_TV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial\phi}\right]-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2cV) \tag{10}$$

（3）**极座标系** $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

即为（9）式中 $\frac{\partial c}{\partial z}=0$ 时的方程；

若弥散是轴对称的，则为（9）式中 $\frac{\partial c}{\partial z}=0$ 和 $\frac{\partial c}{\partial\theta}=0$ 时的方程：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\alpha_LV+D_dT)\frac{\partial c}{\partial r}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rcV) \tag{11}$$

对流-扩散方程的解析解法

水动力弥散方程与溶液中的对流扩散方程具有类似的形式，因而可以借用对流扩散方程的一些解法。

（1）**点源问题的基本解** 考虑无边界的均质各向同性区域，在一点处瞬时注入质量为M的溶质，设流场是静止的。此时一般的对流扩散方程简化为

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2c}{\partial z^2}\right) \tag{12}$$

式中D为扩散系数。若把点源所在的位置取为坐标原点，并移到球座标系，在方程(10)中取 $\frac{\partial c}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial c}{\partial\phi}=0$及$V=0$，并用$D$代替弥散系数，则方程(12)可变为

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{D}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) \tag{13}$$

定解条件是：当 $t=0$ 时，对一切 $r>0$，有 $c=0$；对一切 $t>0$，当 $r=\infty$时，有$c=0$；另外，在整个区域上溶质的质量之和总是等于M，即

$$4\pi\int_0^\infty cr^2d\gamma=M,\quad t\geqslant 0; \tag{14}$$

利用Boltzman变换可求得这一问题的解为（见文献②）

$$c(r,t)=\frac{M}{8(\pi Dt)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \tag{15}$$

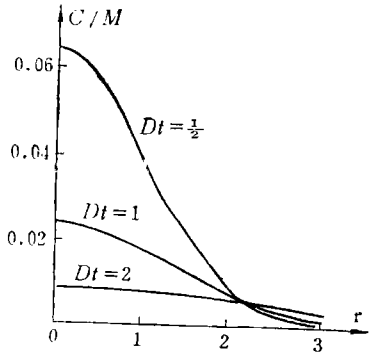


图 1

对于一定的 Dt，r对c/M的关系见图1，从图中看出，随着时间的延续，溶质扩展的范围越来越大，而原点处的最大浓度却越来越小。(15) 式对于扩散问题的求解是非常基本的。

(2) 叠加原理 由于方程(12)属于线性方程，因而我们可以利用叠加原理从基本解(15) 出发求出更多问题的解。设沿一直线（取为 z 轴）瞬时注入一个线源，其单位长度包含的溶质质量为 m。把线源分割成具有微分长度的小段，每一小段均可看作一个点源。由基本解 (15)，位于点 z' 处质量为 mdz' 的点源对于任意点(x,y,z) 所产生的微分浓度为

$$dc=\frac{mdz'}{8(\pi Dt)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2+y^2+(z-z')^2}{4Dt}\right] \tag{16}$$

沿 z 轴积分便得线源问题的解

$$c(x,y,t)=\frac{m}{4Dt}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4Dt}\right) \tag{17}$$

使用类似方法还可以得到面源问题的解。设沿yz 平面对单位面积瞬时注入的溶质质量为 μ，这样的一个面源可以划分为与z轴平行且具有微分宽度为dy'的小条带，每一个小条带都可近似地看作一线源，由(17)式，它对任意点 (x,y,z) 所产生的微分浓度为

$$dc=\frac{\mu dy'}{4\pi Dt}\exp\left[-\frac{x^2+(y-y')^2}{4Dt}\right] \tag{18}$$

沿 y轴积分便得到面源问题的解

$$c(x,t)=\frac{\mu}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{19}$$

公式(17)可用于某些二维问题的求解，公式(19)可用于某些一维问题的求解。

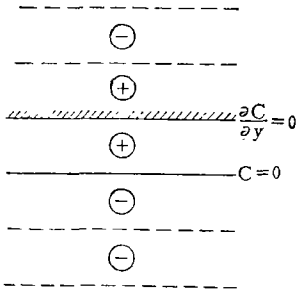


图 2

(3) 映射方法 利用映射方法可以解一些带有简单边界的问题。如图 2 中的带状区域，一侧为 $c=0$ 的定浓度边界，另一侧为隔水的边界，当中有一污染源。映射后叠加(17)式便可得到这一问题的解。其方法与解渗流问题时所用的方法完全类似。

(4) 均匀流场 设沿x方向存在速度为V 的一维稳定流动，取座标轴方向为扩散的主轴方向，则均质各向异性的对流扩散方程为

$$\frac{\partial c}{\partial t}+V\frac{\partial c}{\partial x}=D_{11}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+D_{33}\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \tag{20}$$

令 $Y=y\sqrt{D_{11}/D_{22}}$，$Z=z\sqrt{D_{11}/D_{33}}$，

再令 $X=x-Vt$，即在以速度V 运动的动座标系中进行观察，则方程(20)可化为

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_{11}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial Z^2}\right) \tag{21}$$

此方程在形式上与方程(12)完全相同。由此可知方程(20)对于瞬时点源问题的解为

$$c(x,y,z,t)=\frac{M}{8(\pi D_{11}t)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{D_{22}D_{33}(x-Vt)^2+D_{11}D_{33}y^2+D_{11}D_{22}z^2}{4D_{11}D_{22}D_{33}t}\right\} \tag{22}$$

上述把各向异性变换为各向同性并利用动坐标系的方法是很有用的。

(5) 连续注入 对于方程 (20)，我们来考虑连续注入的情形。设在原点处有一稳定的点源，每单位时间注入的溶质质量为$\dot{M}$。此问题可以看作一系列瞬时点源叠加的结果。按 (22) 式，可求出在t'时刻、质量为$\dot{M}dt'$的瞬时点源对点(x,y,z)产

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

生的微分浓度dc，然后对t'从0到t积分，最终可化为（见文献②）

$$c(x,y,z,t)=\frac{\dot{M}}{8\pi DR}\exp\left(\frac{Vx}{2D_{11}}\right)\left\{\exp\left(\frac{VR}{2D_{11}}\right)\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{Vt}{\sqrt{4D_{11}t}}+\frac{R}{\sqrt{4D_{11}t}}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{VR}{2D_{11}}\right)\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{Vt}{\sqrt{4D_{11}t}}-\frac{R}{\sqrt{4D_{11}t}}\right)\right]\right\} \tag{23}$$

其中 $R=\sqrt{D_{22}D_{33}x^2+D_{11}D_{33}y^2+D_{11}D_{22}z^2}\Big/\sqrt{D_{22}D_{33}}$，这种把连续注入归结为瞬时注入的方法也是很有用的。

以上我们简单地介绍了利用基本解（15）解对流扩散方程的方法，除此之外还可以利用变数分离、拉普拉斯变换等解法，（文献②）。下面我们通过几个例子来说明水动力弥散问题的解法及其应用。

一维水动力弥散问题

问题一： 无限长砂柱中示踪剂的运移。设该砂柱中存在着均均流动，达西流速为$q=nV$，取流动方向为x轴的正向；初始时，在$x<0$一侧示踪剂的浓度为c_0，在$x\geqslant 0$一侧示踪剂的浓度为c_1；这一问题的数学模型是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c}{\partial t}=D_L\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}-V\dfrac{\partial c}{\partial x}\\ c(x,0)=c_0,\ x<0;\ c(x,0)=c_1,\ x\geqslant 0;\\ c(-\infty,\ t)=c_0,\ c(+\infty,\ t)=c_1,\ t>0;\end{cases} \tag{24}$$

初始的浓度分布可以看作瞬时的注入源，利用面源问题的解（19），位于点x'处单位面积所含示踪剂质量为cdx'的面源对动点$\xi=x-Vt$所造成的微分浓度为

$$dc=\frac{cdx'}{\sqrt{4\pi D_L t}}\exp\left\{-\frac{(\xi-x')^2}{4D_L t}\right\} \tag{25}$$

其中$c=c_0$，当$x'<0$；$c=c_1$，当$x'\geqslant 0$；对x'自$-\infty$至$+\infty$积分得

$$c(x,t)=\frac{c_0}{\sqrt{4\pi D_L t}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{(\xi-x')^2}{4D_L t}\right]dx'+\frac{c_1}{\sqrt{4\pi D_L t}}\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{(\xi-x')^2}{4D_L t}\right]dx'$$

$$=c_0+\frac{c_1-c_0}{2}\mathrm{erfc}\left[-\frac{x-Vt}{\sqrt{4D_L t}}\right] \tag{26}$$

这就是问题一的解。

问题二： 半无限长砂柱（$0\leqslant x<\infty$）中示踪剂的运移。设砂柱中存在着达西流速$q=nV$的均匀流动；初始时砂柱中不含示踪剂；而当$t\geqslant 0$时，柱端（$x=0$）处的浓度始终保持为$c=c_0$。这一问题的数学模型是

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c}{\partial t}=D_L\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}-V\dfrac{\partial c}{\partial x}\\ c(x,0)=0,\ 当\ 0\leqslant x<\infty;\\ c(0,t)=c_0,\ c(\infty,t)=0,\ 当\ t\geqslant 0;\end{cases} \tag{27}$$

利用拉普拉斯变换可求得本问题的解为（见文献②）

$$c(x,t)=\frac{c_0}{2}\mathrm{erfc}\left[\frac{x-Vt}{2\sqrt{D_L t}}\right]+\frac{c_0}{2}\exp\left(\frac{Vx}{D_L}\right)\mathrm{erfc}\left[\frac{x+Vt}{2\sqrt{D_L t}}\right] \tag{28}$$

在上式中，当x较大时，右端第二项可忽略不计。于是得

$$c(x,t)/c_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-Vt}{\sqrt{2D_L t}}}^{\infty}\exp[-\eta^2]d\eta \tag{29}$$

对于给定的t，上式关于x为正态分布$1-N\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]$，其数学期望$m$和方差$\sigma$分别为

$$m=Vt,\quad \sigma=\sqrt{2D_L t}; \tag{30}$$

正态分布函数 $N\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]$的一个经典性质是 $N[1]\doteq 0.84$；$N[-1]\doteq 0.16$；

按照这一性质，对于固定的时刻t，假若我们定义相对浓度$c/c_0=0.84$处的点$x_{0.84}$与相对浓度$c/c_0=0.16$处的点$x_{0.16}$之间的距离为过渡带的宽度e，则$e=2\sigma$。根据室内试验资料我们可以绘出某一时刻t相对浓度随x变化的图，见图3。

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

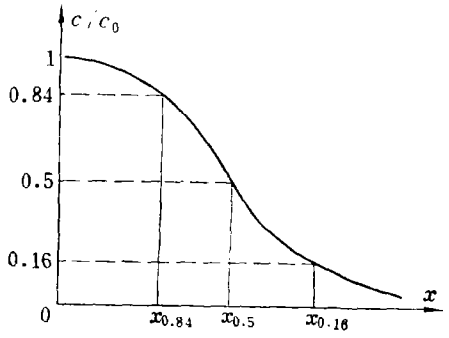


图 3

从图上找到 $x_{0.84}$和$x_{0.16}$，它们之间的距离就是过渡带的宽度 c，于是得 $\sigma=\frac{1}{2}(x_{0.16}-x_{0.84})$，再利用(30)式即得

$$D_L=\frac{1}{8t}(x_{0.16}-x_{0.84})^2 \tag{31}$$

把它转换成在一个固定点x处计算的公式更为方便。令 $t_{0.16}$ 和 $t_{0.84}$ 分别表示点 x 处的相对浓度达到0.16和0.84的时间，则有

$$D_L=\frac{1}{8}\left[(x-Vt_{0.16})/\sqrt{t_{0.16}}-(x-Vt_{0.84})/\sqrt{t_{0.84}}\right]^2 \tag{32}$$

使$c/c_0=50\%$的点$x_{0.5}$总是以平均速度V移动，所以$x_{0.5}=Vt_{0.5}$。通常过渡带的宽度和砂柱的长度相比甚小，所以(32)式中的$\sqrt{t_{0.16}}$和$\sqrt{t_{0.84}}$可近似地用$\sqrt{t_{0.5}}$代替，从而有

$$D_L=\frac{V^2}{8t_{0.5}}(t_{0.84}-t_{0.16})^2 \tag{33}$$

上式中的 $t_{0.16}$，$t_{0.5}$，$t_{0.84}$在砂柱的末端测量时上式仍然是近似成立的。还可以更方便地用测量砂柱末端被驱替出来的流体体积来代替对时间的测量。因为砂柱末端单位横截面被驱替出来的流体体积$U=Vt$，所以(33)式可改写为

$$D_L=\frac{V}{8U_{0.5}}(U_{0.84}-U_{0.16})^2 \tag{34}$$

式中$U_{0.16}$，$U_{0.5}$，$U_{0.84}$分别是当砂柱末端相对浓度达到0.16，0.5和0.84时被驱替出来的流体的体积。人们常用(34)式解释室内一维弥散试验以求得纵向弥散系数。因为在砂柱末端的实际边界条件是$\frac{\partial c}{\partial x}=0$，而不是无限长的柱，所以计算带有一定的误差。我们已经编制了一个计算机程序，可以模拟室内试验的实际条件，并能根据实验的观测数据自动确定纵向弥散系数。

二维水动力弥散问题

问题三： 一维流场中示踪剂的二维弥散（瞬时注入的情形）。设在无限平面上存在着达西流速为 $q=nV$ 的一维流动。令这个平面为xy平面并使x轴方向与流速方向一致。$t=0$时在原点处瞬时注入质量为m的示踪剂。这一问题的数学模型是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial c}{\partial t}=D_L\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}+D_T\dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2}-V\dfrac{\partial c}{\partial x}, \\ c(x,y,o)=0, \quad x,y\neq 0; \\ c(\pm\infty,\ y,\ t)=0, \quad c(x,\ \pm\infty,\ t)=0,\ t\geqslant 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} nc\,dx\,dy=m;\end{cases} \tag{35}$$

若采用变换 $Y=y\sqrt{D_L/D_T}$，并在运动坐标系 $\omega=x-Vt$ 中观察，那么这一问题实际上就是前述的瞬时线源问题，故由(17)式直接得到它的解为

$$c(x,y,t)=\frac{m/n}{4\pi t\sqrt{D_LD_T}}\exp\left\{-\frac{(x-Vt)^2}{4D_Lt}-\frac{y^2}{4D_Tt}\right\} \tag{36}$$

忽略分子扩散，以$D_L=\alpha_LV$，$D_T=\alpha_TV$代入上式得

$$c(x,y,t)=\frac{m/n}{4\pi Vt\sqrt{\alpha_L\alpha_T}}\exp\left\{-\frac{(x-Vt)^2}{4\alpha_LVt}-\frac{y^2}{4\alpha_TVt}\right\} \tag{37}$$

这一公式可以用于拟合野外实验求弥散度 α_L和 α_T。文献④提出了下述方法：在试验场相距一定距离（一般不超过100米）打两排井，在M线的井中注水，在N线的井中抽水，经一定时间之后两线之间就形成了均匀而稳定的一维流动，见图4。在中间的井 B 对含水层每单位厚度瞬时注入质量为m的示踪剂，然后在N_4，N_5，N_6等井观测示踪剂浓度的变化，典型曲线见图5。这一实验的数学模型就是(35)，设$(X,\ Y)$是一个观测头的座标，$c(t)$是这个观测头中示踪剂的浓度随时间的变化，引进下列无量纲变数：

$$t_R=Vt/\alpha_L;\quad a=[X^2/\alpha_L^2+Y^2/\alpha_L\alpha_T]^{1/2};\quad c_R=c/c_{max}; \tag{38}$$

式中c_{max}是浓度的峰值。将它们代入到(37)式中得

$$c_R(t_R)=kt_R^{-1}\exp\left[-\frac{a^2+t_R^2}{4t_R}\right] \tag{39}$$

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

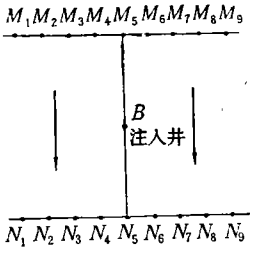


图 4

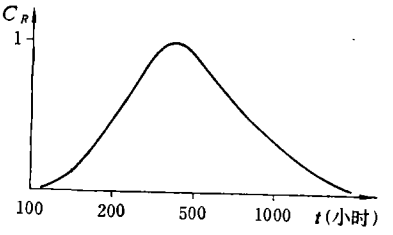


图 5

其中， $k=t_{R,\max}\exp\left[\frac{a^2+t_{R,\max}^2}{4t_{R,\max}}\right]$， $t_{R,\max}=\sqrt{4+a^2}-2$ (40)

(39)式只依赖于一个无量纲参数 a，因此对不同的a值可按（39）式绘出一族标准曲线，见图 6 。图中的纵坐标是c_R，横坐标t_R用对数尺度。

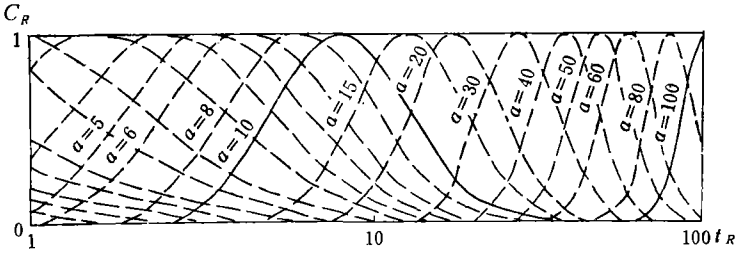


图 6

将井N_5的观测曲线与图 6 的标准曲线做对比，可求出相应的 a 值，记为 a_5。设N_5的坐标为(X_5，0)，则由(38) 式得 $a_5=X_5/\alpha_L$，于是

$$\alpha_L=X_5/a_5 \tag{41}$$

再将井N_4的观测曲线与标准曲线对比，也可求出相应的 a 值，记为a_4。该N_4的坐标为(X_4，Y_4)，则由(38)式得

$$\alpha_T=Y_4^2/\alpha_T(a_4^2-X_4^2/\alpha_L^2) \tag{42}$$

这种野外试验的精度较高，计算也比较容易，但是需要投入专门的工作量，花费较大。另一种类似的试验是采用连续注入方法，下面给出它的计算公式。

问题四： 一维流场中示踪剂的二维弥散（连续注入的情形）。基本假定同上例，但设从 $t=0$ 开始在原点处以速率Q 连续注入含示踪剂浓度为c_0的流体。因为连续注入可看作一系列的瞬时注入，故只须对时间进行积分，便可由(38)式求得本问题的解为：

$$c(x,y,t)=\frac{c_0Q}{4\pi\sqrt{D_LD_T}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(x-V\eta)^2}{4D_L\eta}-\frac{y^2}{4D_T\eta}\right]\frac{d\eta}{\eta} \tag{43}$$

让 $t\to\infty$，可得到这一情形下的渐近浓度分布

$$c(x,y)=\frac{c_0Q}{2\pi\sqrt{D_LD_T}}\exp\left(\frac{xV}{2D_L}\right)K_0\left(\frac{x^2V^2}{4D_L}+\frac{y^2V^2}{4D_LD_T}\right) \tag{44}$$

式中K_0是第二类零阶修正的贝塞尔函数。借助于汉土什的越流井函数

$$W(u,b)=\int_u^\infty\exp\left(-y-\frac{b^2}{4y}\right)\frac{dy}{y} \tag{45}$$

并设 $D_L=\alpha_LV$， $D_T=\alpha_TV$，可将(43)式改写为

$$c(x,y,t)=\frac{c_0Q}{4\pi V\sqrt{\alpha_L\alpha_T}}\exp\left(\frac{x}{2\alpha_L}\right)[W(o,b)-W(t,b)] \tag{46}$$

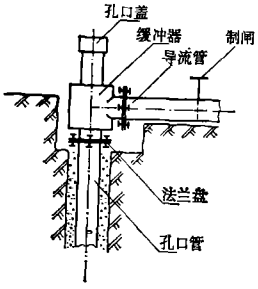
式中 $b^2=\frac{x^2}{4\alpha_L^2}+\frac{y^2}{4\alpha_L\alpha_T}$。(46)式使用起来比较方便，有关渗流计算的书中列有越流井函数的表格。在文献④中利用无量纲参数绘制了解(46)的标准曲线，可用于野外实验求 α_L和α_T，但这种实验的花费太大。下述的径向弥散试验可利用原有的钻孔进行，比较实用。

径向水动力弥散问题

问题五： 无天然流速时示踪剂的径向弥散。设在水平、等厚、无限展布的均质、各向同性承压含水层中有一口完整井，井半径为r_0，通过它以定流量Q连续注入含示踪剂浓度为 c_0 的水，在无天然流速的条件下，井的附近会很快形成接近稳定的二

（下转第53页）

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



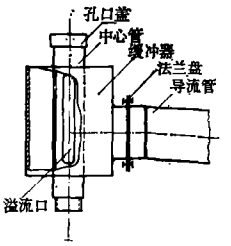


图 1　管式导流装置示意图　图 2　桶式导流装置

的回水阀门全部打开，让主动钻杆里的气、水排出，防止假喷发生。

12. 起完钻具后，将粗径钻具拖放至机场地板上之前，应将取粉管内的热水抽去一部分，防止流出或溅出伤人。

13. 向孔内下降钻具时，钻杆上端应接上"实心蘑菇头"，防止下降钻具过程中钻杆上口喷出热水。

14. 采用"一快二干"的操作方法

"一快"即在升降钻具时操作者的操作动作要快，以尽量缩短接触热烫钻具的时间；"二干"就是保持操作者的双层手套干，手套湿后容易传热。

15. 保持机场良好地通风

可采取揭开机房周围帆布的方法，加强自然通风或采用风扇排风。

16. 在防坍、防漏、防喷的情况下，采用优质泥浆或加重泥浆时，返回地表的高温泥浆要入冷却塔、加长循环槽、增加冷却池等办法进行冷却。

17. 有井喷的机场，要从塔上向塔下安装安全下降器，以供塔上工作遇到井喷危险时，能乘安全下降器离开钻塔。

（上接第61页）

维径向流。此时通过以井为中心的任一半径为 r 的圆周的通量均为

$$2\pi KBr\frac{\partial h}{\partial r}=-Q \tag{47}$$

式中 K 是水力传导系数，B 为含水层的厚度。由此式及达西定律可得平均流速为

$$V(r)=\frac{q}{n}=-\frac{K}{n}\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi Bnr}=\frac{A}{r} \tag{48}$$

其中 $A=\frac{Q}{2\pi Bn}$，以此代入方程(11)并忽略分子扩散便得到最简单的径向流弥散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\alpha_L A}{r}\frac{\partial^2 c}{\partial r^2}-\frac{A}{r}\frac{\partial c}{\partial r} \tag{49}$$

附加的定解条件是：$c(r,o)=0$，当 $r\geqslant r_0$；$c(r_0,t)=c_0$，$c(\infty,t)=0$，对任意 $t>0$。由于方程(49)的系数赖于 r，所以给求解带来困难。长期以来，这一简单问题只能靠数值方法或近似方法求解。直到1979年 Tang 等人才导出了它的精确解（见文献③）。他们得到的解是

$$c(r,t)/c_0=1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r-r_0}{2\alpha_L}\right)(I_1+I_2+I_3) \tag{50}$$

其中 I_1，I_2，I_3 是包含几类贝塞尔函数的积分，依赖于 r，r_0，α_L 和 A。因为表达式太长，在此从略。我们已为这一解析解编制了计算机程序，可用于拟合野外实验求纵向弥散度 α_L。当存在天然流速时，需用数值解拟合野外实验。存在解析解的其他例子见参考文献①。

参 考 文 献

① Bear, Jacob, "Dynamics of Fluids in Porous Media" American Elsevier, New York, 1972.

② Wen-Hsiung Li, "Differential Equations of Hydraulic Transients, Dispersion, And Groundwater Flow", Prentice-Hali, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

③ D. H. Tang and D. K. Babu, "Analytical solution of a velocity Dependent Dispersion prohlem", Water Resources Research, vol. 15, No. 6. 1979.

④ Jean-Pierre Sauty, "An Analysis of Hydrodispersive Transferin Aquifers", Water Resources Reseerch, vol. 16. No. 1. 1980.

(C)1994-2021 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net