

非饱和渗流模拟中非均匀空间网格的改进方法

朱帅润, 何博, 吴礼舟, 李绍红, 卿毅伟

An improved method for inhomogeneous space grid in the simulation of unsaturated flow

ZHU Shuirun, HE Bo, WU Lizhou, LI Shaohong, and QING Yiwei

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202110013>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

空间链接器式多维通用饱和-非饱和流模型研究

A generalized multi-dimensional saturated-unsaturated flow model based on spatial linkers

杨海, 姜月华, 周权平, 杨辉, 刘林 水文地质工程地质. 2020, 47(5): 31-42

基于改进稀疏网格替代模拟的地下水DNAPLs运移不确定性分析

Uncertainty analysis of groundwater DNAPLs migration based on improved sparse grids surrogate model

高鑫宇, 曾献奎, 吴吉春 水文地质工程地质. 2020, 47(1): 1-10

含单裂隙非饱和带中轻非水相流体修复的数值模拟

Numerical simulation of light non-aqueous phase liquids remediation in the unsaturated zone with single fractures

赵科锋, 王锦国, 曹慧群 水文地质工程地质. 2020, 47(5): 43-55

非饱和花岗岩残积土水-气两相驱替过程数值模拟

Numerical simulation of water-gas two-phase displacement process in unsaturated granite residual soil

蔡沛辰, 阙云, 李显 水文地质工程地质. 2021, 48(6): 54-63

考虑非饱和浸润层厚度和累积入渗量的改进Green-Ampt模型

An improved Green-Ampt model for rainfall infiltration in the inner dumping site of an open pit coal mine

王雪冬, 李世宇, 孙延峰, 张超彪, 王翠, 朱永东 水文地质工程地质. 2021, 48(6): 64-71

考虑孔隙水微观赋存形态的非饱和粉土有效应力方程及其验证

An effective stress equation for unsaturated silt considering the microstructure of pore water and its verification

曾立峰, 邵龙潭, 牛庚, 郭晓霞 水文地质工程地质. 2022, 49(4): 37-46



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

DOI: 10.16030/j.cnki.issn.1000-3665.202110013

朱帅润, 何博, 吴礼舟, 等. 非饱和渗流模拟中非均匀空间网格的改进方法 [J]. 水文地质工程地质, 2023, 50(1): 32-40.
ZHU Shuirun, HE Bo, WU Lizhou, *et al.* An improved method for inhomogeneous space grid in the simulation of unsaturated flow[J].
Hydrogeology & Engineering Geology, 2023, 50(1): 32-40.

非饱和渗流模拟中非均匀空间网格的改进方法

朱帅润¹, 何 博², 吴礼舟², 李绍红³, 卿毅伟³

(1. 上海交通大学土木工程系, 上海 200240; 2. 重庆交通大学山区桥梁及隧道工程国家重点实验室, 重庆 400074; 3. 成都理工大学环境与土木工程学院, 四川 成都 610059)

摘要: Richards 方程在非饱和渗流模拟及其他相关领域应用广泛。在数值求解过程中, 可以采用有限差分方法进行数值离散并迭代求解, 为了获得较可靠的数值解, 常规的均匀网格空间步长往往是较小的。在一些不利数值条件下, 如入渗于干燥土壤, 迭代计算费时甚至精度也不能得到很好改善。因此, 文章提出 Chebyshev 空间网格改进方法, 结合有限差分方法对 Richards 方程进行数值离散以获得线性方程组, 并通过经典的 Picard 迭代方法进行迭代求解线性方程组以得到 Richards 方程的数值解。通过均质土和分层土 2 个不利情况下的非饱和渗流算例, 又结合模型解析解和软件 Hydrus-1D, 对比研究了改进网格方法与均匀网格方法获得数值解的精度。结果表明, 提出的 Chebyshev 网格方法相较于传统的均匀网格, 可以在较少的节点数下获得较高的数值精度, 又具有较小的计算开销, 有较好的应用前景。

关键词: Richards 方程; 有限差分; 均匀网格; Chebyshev 网格; 数值精度

中图分类号: TV139.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-3665(2023)01-0032-09

An improved method for inhomogeneous space grid in the simulation of unsaturated flow

ZHU Shuirun¹, HE Bo², WU Lizhou², LI Shaohong³, QING Yiwei³

(1. Department of Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China; 2. State Key Laboratory of Mountain Bridge and Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China; 3. College of Environment and Civil Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu, Sichuan 610059, China)

Abstract: The Richards' equation is widely used in the simulation of unsaturated flow and related fields. In the numerical solution process, the finite difference method can be used to carry out numerical discretization and iterative calculation. However, in order to obtain a more reliable numerical solution, the space step size of a conventional uniform grid is often small. For some unfavorable numerical conditions, such as infiltration into dry soil, iterative calculation is time-consuming and even the accuracy cannot be improved very well. Therefore, an improved method is proposed by using the Chebyshev space grid, which combines the finite difference method to numerically discretize the Richards' equation to obtain linear equations. Then the classic Picard iterative method is used to iteratively solve the linear equations to obtain the numerical solutions of the Richards' equations. Through two examples of unsaturated flow under unfavorable conditions for homogeneous soil and layered soil, combined

收稿日期: 2021-10-11; 修订日期: 2022-02-08

投稿网址: www.swdzgdz.com

基金项目: 国家自然科学基金项目(41790432; 42277183); 国家重点研发计划项目(2018YFC1504702)

第一作者: 朱帅润(1992-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土工程数值计算方法等方面的研究工作。E-mail: zhushuirun@sjtu.edu.cn

with the analytical solution of the model and the software Hydrus-1D, the accuracy of the numerical solution obtained by the improved grid method and the uniform grid method is compared and examined. The results show that the proposed Chebyshev grid method can obtain higher numerical accuracy with a smaller number of nodes than the traditional uniform grid, and the computational cost is smaller. This method has a good application prospect.

Keywords: Richards' equation; finite difference; uniform grid; Chebyshev grid; numerical accuracy

非饱和渗流问题广泛存在于众多领域,如地质工程中降雨作用下土质边坡的稳定性分析^[1-4],地下水科学中溶质迁移模拟^[5-6],以及矿业工程中煤层注水和煤层气开采等^[7-8]。其中, Richards 方程^[9]是非饱和渗流数值模拟的基本方程,有效并可靠地数值求解 Richards 方程对相关领域的科学研究和生产具有十分重要的意义。

Richards 方程通常有 3 种形式,包括压力水头形式、含水率形式和混合形式^[10-12]。其中,压力水头形式的 Richards 方程备受关注。Richards 方程的解析解可在一些简化条件下获得^[13-14]。如, Parlange 等^[15]求解推导了一维 Richards 方程的复杂级数解以便获得入渗通量; Warrick 等^[16]假设了一个简单的土水特征曲线并推导出一维 Richards 方程的解析解。然而,水力传导系数和土水特征曲线在现实中非常复杂,这导致高度非线性的偏微分方程,因此解析解的获得非常困难。因此,在实际条件下 Richards 方程的求解只能通过数值方法获得^[17-20]。

在 Richards 方程的数值求解中,数值离散方法通常是必要的,常用的空间数值离散方法包括有限差分法^{[21](FDM)}、有限体积法^{[22](FVM)}以及有限元法^[23]。对于时间离散化,通常采用向后差分法^[24]。例如,吴梦喜^[25]发展了求解 Richards 方程具有更好数值稳定性的一般有限元算法。Zambra 等^[26]构造了在空间和时间上具有很高精确度的有限体积法,用于求解非线性 Richards 方程。Chávez-Negrete 等^[24]提出了改进的有限差分法并结合自适应步长的 Crank-Nicolson 方法用于求解 Richards 方程。虽然在数值方法上有很多改进,但传统的 FDM 和 FVM 都需要非常精细的网格来解析复杂的渗流区域,从而导致更多的计算时间。因此,越来越多的研究关注于非结构网格的改善^[27-28]。最近, Deng 等^[27]利用非正交网格的坐标变换便捷地求解了复杂地形中的饱和-非饱和渗流问题。Chávez-Negrete 等^[24]采用不规则的三角形网格加密边坡表层,获得了更可靠的数值解。Dolejší 等^[28]开发了一种各向

异性网格自适应技术,这种方法在不损失精度的情况下显著减少了自由度的数量以及计算时间。郑川东等^[29]提出一种动态局部自适应空间网格方法用于求解水流水质耦合方程,相对于传统结构均匀网格模型,该方法精度高、效率高,能够自动捕捉计算敏感区域,准确模拟复杂流态和物质的迁移扩散。何金辉等^[30]在离散元软件 PFC^{2D} 基础上,开发了考虑流体动网格的颗粒-流体耦合算法,有助于提高模拟大变形下的一维固结试验等案例的数值精度。此外,一些模拟软件也采用了动态网格划分方法以获得更好的数值结果,如 ANSYS、FLUENT 等^[31]。

由此可知,非均匀空间网格的使用在一定程度上可以有效降低计算量,同时也能保证计算精度。但在一些不利数值条件下,比如入渗于初始干燥土壤中,以及分层土上下两层的水力传导系数相差较大时,上述研究的非结构空间网格以及动态网格方法的实现往往较为复杂且不太合适,因此,本文提出采用一种非均匀 Chebyshev 空间网格改进的 FDM 数值离散过程,并与传统均匀空间网格获得的数值结果和解析解对比验证。

1 数值求解过程

1.1 控制方程

通常, Richards 方程可用于描述多孔介质中非饱和和渗流问题,其一维压力水头形式可以表示为^[32]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K_z(h) \frac{\partial h}{\partial z} \right] + \frac{\partial K_z(h)}{\partial z} = C(h) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

式中: h ——压力水头/m;

t ——时间/h;

$K_z(h)$ ——相对于 z 方向的水力传导系数/($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$);

$C(h)$ ——容水度/ m^{-1} , $C(h) = \partial\theta/\partial h$;

θ ——含水率/%。

在非饱和土渗流问题中,本文假设水力传导系数和含水率相对于压力水头的数学关系由下面的指数模型给出^[33]:

$$K(h) = K_s e^{\alpha h} \quad (2)$$

$$\theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h} \quad (3)$$

式中: θ_r ——残余含水率/%;

θ_s ——饱和含水率/%;

K_s ——土体的饱和水力传导系数/(m·s⁻¹);

α ——土性相关的模型拟合参数。

1.2 均匀网格法

为了获得式(1)的数值解,传统的有限差分法采用均匀网格法进行数值离散^[22]。首先, z 轴上的间隔被分为 N 等分,模拟时间被分为 M 等分。进而,式(1)的一、二阶空间导数离散采用中心差分格式,时间导数则采用后向差分格式,其有限差分格式为:

$$\frac{\left[\frac{K_{i+1/2}^{m+1}(h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1}) - K_{i-1/2}^{m+1}(h_i^{m+1} - h_{i-1}^{m+1})}{\Delta z^2} \right] + \frac{K_{i+1/2}^{m+1} - K_{i-1/2}^{m+1}}{\Delta z}}{C_i^{m+1/2} \frac{(h_i^{m+1} - h_i^m)}{\Delta t}} \quad (1 \leq i \leq N-1, 0 \leq m \leq M) \quad (4)$$

式中: i ——沿 z 轴的离散节点(边界节点除外);

m ——时间节点数;

Δz ——离散的均匀空间步长(图 1);

Δt ——离散的时间步长。

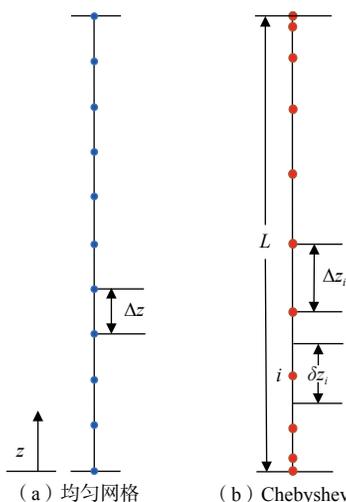


图 1 均匀网格和 Chebyshev 网格的示意图

Fig. 1 Schematic diagram of uniform grid and Chebyshev grid.

考虑稳态情况时,其有限差分格式可简化如下:

$$\frac{\left[\frac{K_{i+1/2}(h_{i+1} - h_i) - K_{i-1/2}(h_i - h_{i-1})}{\Delta z^2} \right] + \frac{K_{i+1/2} - K_{i-1/2}}{\Delta z}}{C_i^{m+1/2} \frac{(h_i^{m+1} - h_i^m)}{\Delta t}} = 0 \quad (5)$$

式中: $K_{i+1/2}$ 、 $K_{i-1/2}$ ——相邻节点对应的水力传导系数的调和平均值,可表示为:

$$K_{i+1/2} = \frac{2K_i K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \quad (6)$$

$$K_{i-1/2} = \frac{2K_i K_{i-1}}{K_i + K_{i-1}} \quad (7)$$

式(4)(5)所构成的线性方程组可进一步写成矩阵形式:

$$A\mathbf{h} = \mathbf{b} \quad (8)$$

式中: A —— $(N-1) \times (N-1)$ 阶三对角矩阵;

\mathbf{h} —— $(N-1)$ 维列向量;

\mathbf{b} —— $(N-1)$ 维列向量,此处向量 \mathbf{b} 的首尾元素已包含了边界条件。

1.3 改进的 Chebyshev 网格法

由于非饱和渗流问题中压力水头在边界和土层分界面往往存在较大的变化,因此通常需要一个更精细的网格来进行加密。然而传统的均匀网格在加密过程中,将产生过多的计算网格节点,计算费时甚至仍不够精确。考虑上述情况,提出一种 Chebyshev 网格坐标^[34]:

$$z_i = \cos(i\pi/N) \times \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \quad (i = N, N-1, \dots, 0) \quad (9)$$

式中: L ——土层厚度。

如图 1(b)所示, Chebyshev 网格节点只会在界面处进行高度加密,很大程度上降低了网格节点数量。结合 Chebyshev 网格的 FDM 离散格式可以表达为:

$$\frac{1}{\delta z_i} \left[\frac{K_{i+1/2}^{m+1}(h_{i+1}^{m+1} - h_i^{m+1})}{\Delta z_{i+1}} - \frac{K_{i-1/2}^{m+1}(h_i^{m+1} - h_{i-1}^{m+1})}{\Delta z_i} \right] + \frac{K_{i+1/2}^{m+1} - K_{i-1/2}^{m+1}}{\delta z_i} = C_i^{m+1/2} \frac{h_i^{m+1} - h_i^m}{\Delta t} \quad (10)$$

式中: Δz_i ——Chebyshev 网格节点之间的不等间距;

δz_i ——计算节点处前后 $K_{i+1/2}$ 和 $K_{i-1/2}$ 之间的不等间距,如图 1 所示。

式(10)也可以简化为如式(8)的矩阵形式,由于水力传导系数和含水率的非线性关系,通常数值离散后需要采用非线性迭代法对系数矩阵 A 反复评估并迭代计算。其中, Picard 法是比较经典和实用的非线性迭代方法,即:

$$A(\mathbf{h}^{m+1,k})\mathbf{h}^{m+1,k+1} = \mathbf{b}(\mathbf{h}^{m+1,k}, \mathbf{h}^m) \quad (11)$$

式中: k ——迭代次数。

对于迭代过程,当相对残差满足如下迭代容差时,迭代终止:

$$\frac{\|\mathbf{h}^{m+1,k+1} - \mathbf{h}^{m+1,k}\|_{\infty}}{\|\mathbf{h}^{m+1,k}\|_{\infty}} < \varepsilon \quad (12)$$

式中: ε ——迭代容差,在这次研究中设置为 10^{-8} ^[35]。

基于上述 Richards 方程的 Chebyshev 网格离散格

式, 使用 MATLAB(版本: R2014a)语言开发了有关非饱和和渗流的程序。

2 数值评价

2.1 均质土的非饱和和渗流

该案例描述的是均质非饱和土中的一维瞬态非饱和和渗流^[17], 假设土层厚度 $L = 10$ m, 指数模型参数设置为: $\alpha = 1 \times 10^{-4}$ 、 $\theta_s = 0.50$ 、 $\theta_r = 0.11$, 以及饱和水力传导系数 $K_s = 2.5 \times 10^{-8}$ m/s。此外, 边界条件可以写为:

$$h(z=0) = h_0 \quad (13)$$

$$h(z=L) = 0 \quad (14)$$

假设 $h_0 = -10^5$ m, 该瞬态非饱和流问题的精确解为^[36]:

$$h_{\text{ana}}(z, t) = \frac{1}{\alpha} \ln [h_t^*(z, t) + h_s^*(z) + e^{\alpha h_0}] \quad (15)$$

其中,

$$h_t^*(z, t) = \frac{2(1 - e^{\alpha h_0})}{Lc} e^{\alpha(L-z)/2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\lambda_k}{\mu_k} \right) \sin(\lambda_k z) e^{-\mu_k t} \quad (16)$$

$$h_s^*(z) = (1 - e^{\alpha h_0})(1 - e^{-\alpha z}) / (1 - e^{-\alpha L}) \quad (17)$$

式中, $\lambda_k = k\pi/L$, $\mu_k = (\alpha^2/4 + \lambda_k^2)/c$ 。

此外, 选择 3 个指标, 即均方根误差 (RSE), 相对误差 (RE) 和最大相对误差 (MRE), 验证所提网格方法的计算精度:

$$RSE = \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{h_i - h_i^*}{h_i^*} \right)^2 \right]^{0.5} \quad (18)$$

$$RE = 100 \left[\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left| \left(\frac{h_i - h_i^*}{h_i^*} \right) \right| \right] \quad (19)$$

$$MRE = 100 \left[\max \left| \frac{h_i - h_i^*}{h_i^*} \right| \right] \quad (20)$$

式中: h_i ——模型数值计算值;

h_i^* ——模型的精确值。

3 个指标的值越小, 表示模型数值计算的精度越高。总模拟时间设置为 5 h, 节点数分别取为 100, 150, 200, 时间步长 (Δt) 分别取为 0.01, 0.02, 0.04 h。图 2(a) 显示了当节点数 $N=100$ 时, 不同时间步长下不同网格方法获得的 MRE , 可以看出 Chebyshev 网格法获得的 MRE 范围在 0.6% ~ 4.5% 之间, 随时间 t 的增加表现为先减小后增大, 当 $t < 4$ h 时, MRE 随着 Δt 的减小而减小; 而均匀网格法获得 MRE 范围在 1.3% ~ 49% 之间, 尤其当 $t > 1$ h 时, MRE 随着 t 的增加而增大, 并远远大

于 Chebyshev 网格法获得的 MRE 。图 2(b) 显示了当时时间步长 $\Delta t=0.01$ h 时, 不同离散网格节点数下不同网格方法获得的 MRE , 可以发现均匀网格法获得 MRE 随着时间 t 的增加而增大, 当 $t > 1$ h 时, 其误差越来越大; 而 Chebyshev 网格法获得的 MRE 范围仅在 0.3% ~ 2.3% 之间, 随着时间 t 的增加表现为开口向上的抛物线, 此外, 两种方法的 MRE 随着网格节点数 N 的增加均有减小的趋势。

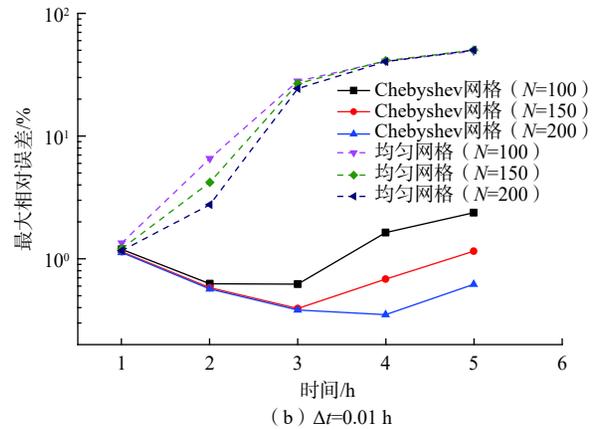
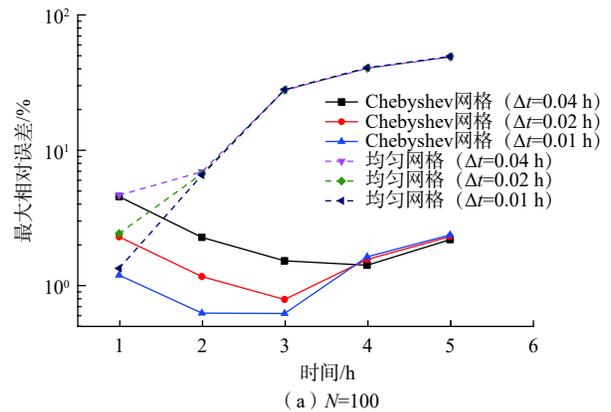


图 2 不同数值条件下不同网格方法的最大相对误差的比较
Fig. 2 Comparison of the maximum relative error of different grid methods under different numerical conditions

如图 3 所示, 在 $\Delta t=0.01$ h 和 $N=200$ 条件下采用两种网格方法获得数值解, 并与精确解进行比较。可以发现, 均匀网格法获得的数值解与精确解存在较大的偏差, 尤其在时间 $t > 2$ h 后, 如图 3(a) 所示; 而 Chebyshev 网格法获得数值解与精确解十分吻合, 随着时间 t 的增加, 相对误差较小, 如图 3(b) 所示。

正如表 1 所示, 在 $t=5$ h 时, 可以看到两种方法的 RSE 和均匀网格的 RE 均随着 N 的增加而减小, 而 Chebyshev 网格的 RE 随着 N 的增加而增大, 但从数值上可以看出 Chebyshev 网格的 RSE 与均匀网格法相差近 100 倍, 而 RE 与均匀网格法相差 10 倍以上。

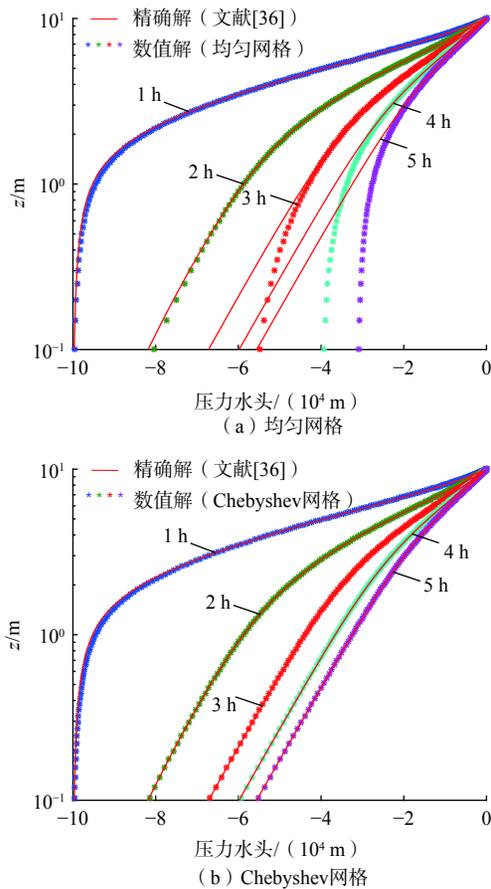


图 3 不同网格方法下获得的数值解和精确解的比较

Fig. 3 Comparison of the numerical solutions obtained by different grid methods and exact solutions

表 1 $t=5\text{ h}$ 时的数值精度

Table 1 Numerical accuracy at $t=5\text{ h}$

条件	RSE		RE/%	
	均匀网格法	Chebyshev网格法	均匀网格法	Chebyshev网格法
100	0.11	4.7×10^{-3}	5.01	0.050 2
150	0.10	2.6×10^{-3}	4.53	0.121 7
200	0.09	2.1×10^{-3}	4.05	0.147 6

这个案例说明了提出的 Chebyshev 网格方法并不因网格节点数的限制而改善精度,也就是说,该方法可以在较少的节点数下获得较高的数值精度,又具有较小的计算开销。

2.2 分层土的非饱和和渗流

利用分层土中非饱和和稳态流对提出的改进网格方法进行进一步的验证,其数学模型如图 4 所示。两层土模型参数设置为 $\theta_s = 0.35, \theta_r = 0.14, \alpha = 8 \times 10^{-3}$ 。此外,土层 1 厚度 (L_1) 和土层 2 厚度 (L_2) 均设置为 5 m,边界条件与上一个案例一致,其中初始条件 $h_0 = -10^3\text{ m}$ 。对于两层土, Chebyshev 网格节点坐标可以定义为:

$$z_{1i} = \cos(i\pi/N_1) \times \frac{L_1}{2} + \frac{L_1}{2} \quad (i = N_1, N_1 - 1, \dots, 0) \quad (21)$$

$$z_{2i} = \cos(i\pi/N_2) \times \frac{L_2}{2} + \frac{L_2}{2} + L_1 \quad (i = N_2 - 1, N_2 - 2, \dots, 0) \quad (22)$$

式中: N_1 和 N_2 ——土层 1 和土层 2 所离散的节点数,本案例中 N_1 和 N_2 均假设为 40。

在分层土中,由于不同土壤类型组合的影响,不同的组合对非饱和和渗流存在很大影响。正如表 2 所示,不同土壤的饱和水力传导系数是不同的。为了进一步验证所提网格的适用性,假设土层 1 的饱和水力传导系数 (K_{s1}) 为固定值 10^{-1} m/s ,土层 2 逐渐从粗砂土转变为细黏土,其水力传导系数 (K_{s2}) 从 10^{-2} m/s 变化为 10^{-9} m/s (表 3)。

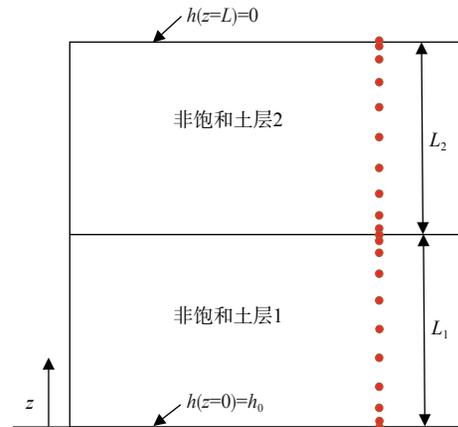


图 4 两层非饱和土的 Chebyshev 网格

Fig. 4 Chebyshev grid of two-layer unsaturated soil

表 2 饱和土壤的水力传导系数

Table 2 Hydraulic conductivity values for saturated soils

土壤类型	饱和水力传导系数/($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
无杂质的砂石	$10^{-2} \sim 1$
粗砂	$10^{-4} \sim 10^{-2}$
细砂	$10^{-5} \sim 10^{-4}$
粉土	$10^{-7} \sim 10^{-5}$
黏土	$< 10^{-8}$

表 3 工况 1 至 8 的水力传导系数

Table 3 Hydraulic conductivity for cases 1 to 8

工况数	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_{s1}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}	10^{-1}
$K_{s2}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}

从图 5(a)可以看出,均匀网格和 Chebyshev 网格获得的数值解是近似的,均可以较好模拟出工况 2 的非饱和和渗流规律。图 5(b)描述的是工况 4 的数值结果,土层 1、土层 2 的饱和水力传导系数的比值为

10⁴, 均匀网格无法精细刻画分界面处的压力水头, 而 Chebyshev 网格获得的数值解却可以较精细地刻画分界面处压力水头的变化。正如图 5(c)所示, Chebyshev 网格在工况 6 时也能精细地刻画出分界面处的压力水头变化规律。这个案例进一步说明了所提的 Chebyshev 网格方法在一些不利入渗条件下尤其在两层土的饱和和水力传导系数相差甚大时, 均能以较少的网格节点数获得更可靠的数值解。

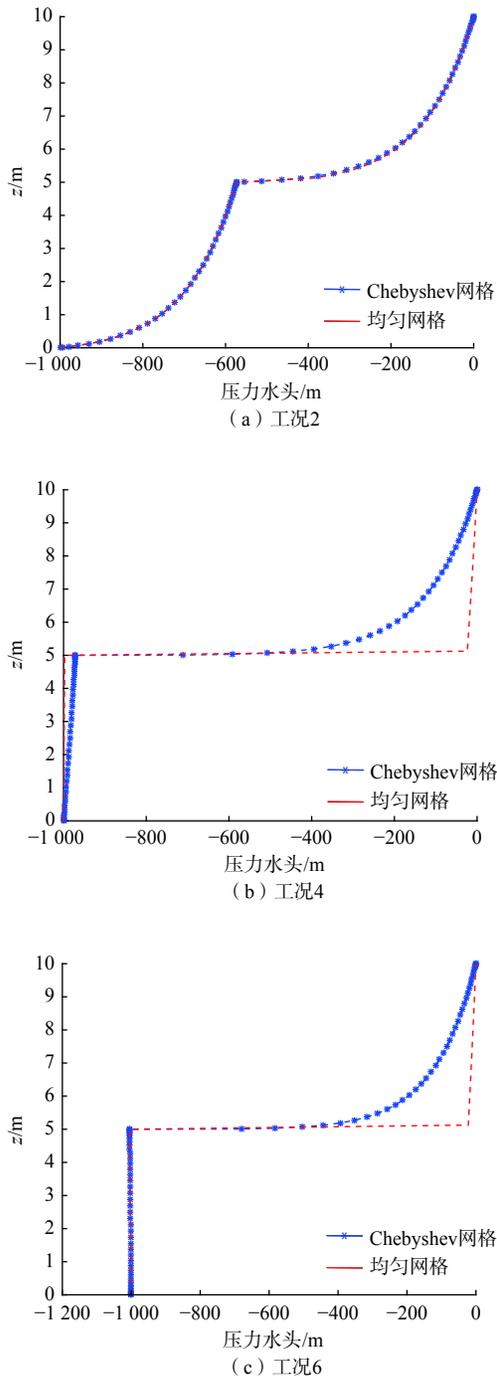


图 5 不同工况下的数值解比较

Fig. 5 Comparison of numerical solutions for different cases.

2.3 与软件 Hydrus-1D 的对比

将提出的网格方法与软件 Hydrus-1D 进行对比以进一步验证改进网格方法的准确性。其中, 土水特征曲线(SWCC)采用 Van Genuchten 模型^[37]来描述:

$$\theta(s) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)[1 + (\alpha_v s)^n]^{-m} \quad (23)$$

$$K(s) = K_s S_e^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^2 \right] \quad (24)$$

式中: s ——基质吸力/kPa, 可近似为负孔隙水压力;

S_e ——有效饱和度, $S_e = 1/[1 + (\alpha_v s)^n]^m$;

α_v 、 n 、 m ——与土性相关的模型参数, 并且 $m = 1 - 1/n$ 。

采用甘肃省天水市的次生黄土进行土柱入渗实验。通过现场入渗过程监测, 饱和水力传导系数为 1.5×10^{-7} m/s。如图 6 所示, 根据土壤含水率和基质吸力的实测数据, 采用 Van Genuchte 模型拟合得到 SWCC, 其确定系数 R^2 为 0.95。此外, Van Genuchte 模型的拟合参数如图 6 所示。数值模拟中假设模型深度为 60 cm, 总模拟时间为 160 h, 初始条件设置为 -260 kPa。在 Hydrus-1D 模拟中, 空间离散采用均匀网格, 其步长设置为 0.5 cm。基于本文的均匀网格法和 Chebyshev 改进网格方法, 时间步长和离散节点数分别设置为 0.1 h 和 120。

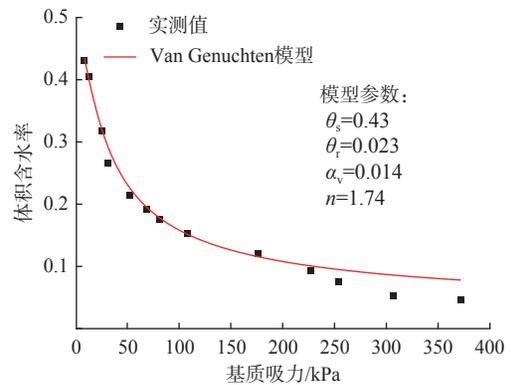


图 6 Van Genuchten 模型拟合得到的 SWCC

Fig. 6 SWCC fitted by Van Genuchten model.

图 7 显示了采用 Hydrus-1D 软件和本文提出方法的数值结果, 可以看出提出方法的数值解与软件 Hydrus-1D 的模拟结果比较吻合, 而且 Chebyshev 网格获得的数值解比均匀网格获得的数值解更接近于 Hydrus-1D 的数值解。如表 4 所示, Chebyshev 网格相对于 Hydrus-1D 数值解的 RSE 、 RE 和 MRE 均小于均匀网格的数值, 这表明提出的改进网格方法在相同离散网格节点数下更加准确合理。

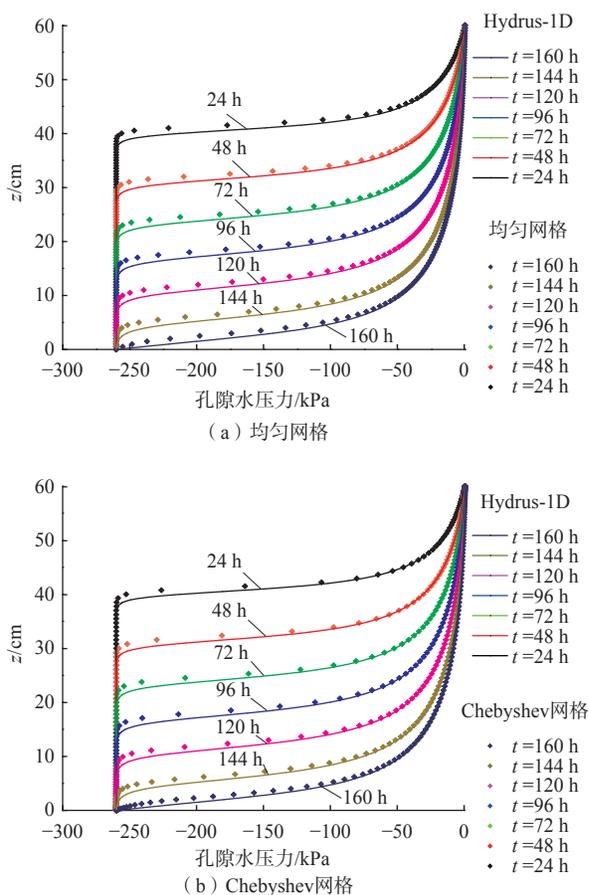


图 7 不同方法下获得的数值解的比较

Fig. 7 Comparison of the numerical solutions obtained by different methods

表 4 数值精度比较

Table 4 Comparison of the numerical accuracy

方法	RSE	RE/%	MRE/%
均匀网格	6.70×10^{-2}	2.81	45.1
Chebyshev网格	5.58×10^{-2}	2.20	34.2

3 结论

(1)非饱和渗流数值求解时,尤其在有限差分法中,数值离散条件的空间步长往往需要较小的步长才能获得可靠的数值解。这往往使得计算费时,甚至在一些不利数值情况下数值精度也并不能得到很大改善。提出的 Chebyshev 网格方法在保持离散节点数不变的情况下,通过一个余弦函数在两侧界面进行加密,进而再数值求解获得更可靠的数值解。

(2)数值结果表明,在极端干燥的初始条件下,所提 Chebyshev 网格方法获得的数值解与精确解十分吻合;在两层土中上下土层的水力传导系数相差较大时, Chebyshev 网格方法所获数值解也能在较少的节点数

下精细刻画出压力水头在分界面处的变化规律,与常规的均匀网格方法相比,该方法可以在较少的节点数下获得较高的数值精度,又具有较小的计算开销。

(3)在分层土中由于界面处水力传导系数的平均化,往往也会使得计算效率下降,本文提出的空间网格方法可以在降低离散节点数层面上提高计算效率。同时,对比软件 Hydrus-1D,可以发现提出的方法与 Hydrus-1D 的数值解是比较吻合的,并且相较于均匀网格方法,提出的 Chebyshev 网格方法在相同离散网格节点数下是更加准确合理的。

参考文献 (References) :

[1] 唐扬,殷坤龙,唐子珺.基于HYDRUS的三舟溪滑坡降雨入渗规律研究[J].水文地质工程地质,2017,44(1):152-156. [TANG Yang, YIN Kunlong, TANG Zijun. Research on the regulation of rain infiltration in the Sanzhouxi landslide based on HYDRUS[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2017, 44(1): 152-156. (in Chinese with English abstract)]

[2] 朱帅润,李绍红,何博,等.改进的Picard法在非饱和土渗流中的应用研究[J].岩土工程学报,2022,44(4):712-720. [ZHU Shuirun, LI Shaohong, HE Bo, et al. Application of improved Picard method in unsaturated seepage[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2022, 44(4): 712-720. (in Chinese with English abstract)]

[3] 陈亮胜,韦秉旭,廖欢,等.膨胀土边坡非饱和渗流及渐进性破坏耦合分析[J].水文地质工程地质,2020,47(4):132-140. [CHEN Liangsheng, WEI Bingxu, LIAO Huan, et al. A coupling analysis of unsaturated seepage and progressive failure of an expansive soil slope[J]. Hydrogeology & Engineering Geology, 2020, 47(4): 132-140. (in Chinese with English abstract)]

[4] 王磊,李荣建,杨正午,等.强降雨作用下黄土陡坡开裂特性测试[J].吉林大学学报(地球科学版),2021,51(5):1338-1346. [WANG Lei, LI Rongjian, YANG Zhengwu, et al. Experimental study on cracking characteristics of loess steep slope under intensive rainfall[J]. Journal of Jilin University (Earth Science Edition), 2021, 51(5): 1338-1346. (in Chinese with English abstract)]

[5] 张弛,仵彦卿,覃荣高.渗透系数升尺度对非均质含水层溶质迁移影响研究[J].水文地质工程地质,2014,41(5):19-25. [ZHANG Chi, WU Yanqing, QIN Ronggao. Research on effects of hydraulic conductivity

- upscaling on groundwater solute transport in heterogeneous aquifer[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2014, 41(5): 19 – 25. (in Chinese with English abstract)]
- [6] 刘争宏, 王华山, 周远强, 等. 安哥拉Quelo砂场地非饱和和渗流试验与计算[J]. *水文地质工程地质*, 2018, 45(4): 79 – 85. [LIU Zhengong, WANG Huashan, ZHOU Yuanqiang, et al. Test and calculation of unsaturated seepage in the Angola Quelo sandy soil site[J]. *Hydrogeology & Engineering Geology*, 2018, 45(4): 79 – 85. (in Chinese with English abstract)]
- [7] 周宏伟, 刘泽霖, 孙晓彤, 等. 深部煤体注水过程中渗流通道演化特征[J]. *煤炭学报*, 2021, 46(3): 867 – 875. [ZHOU Hongwei, LIU Zelin, SUN Xiaotong, et al. Evolution characteristics of seepage channel during water infusion in deep coal samples[J]. *Journal of China Coal Society*, 2021, 46(3): 867 – 875. (in Chinese with English abstract)]
- [8] 周淋, 杨文敬, 谢题志, 等. 苏里格气田南区莲102井区盒8段储层微观孔隙结构及气-水渗流特征[J]. *地质通报*, 2022, 41(4): 682-691. [ZHOU Lin, YANG Wenjing, XIE Tizhi, et al. Reservoir micropore structure and gas-water percolation in He 8 member of well Lian 102 in south area of Sulige gas field[J]. *Geological Bulletin of China*, 2022, 41(4): 682-691.(in Chinese with English abstract)]
- [9] RICHARDS L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums[J]. *Physics*, 1931, 1(5):318–333.
- [10] ZHU Shuairun, WU Lizhou, PENG Jianbing. An improved Chebyshev semi-iterative method for simulating rainfall infiltration in unsaturated soils and its application to shallow landslides[J]. *Journal of Hydrology*, 2020, 590: 125157.
- [11] 王睿, 周宏伟, 卓壮, 等. 非饱和土空间分数阶渗流模型的有限差分方法研究[J]. *岩土工程学报*, 2020, 42(9): 1759 – 1764. [WANG Rui, ZHOU Hongwei, ZHUO Zhuang, et al. Finite difference method for space-fractional seepage process in unsaturated soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2020, 42(9): 1759 – 1764. (in Chinese with English abstract)]
- [12] LIST F, RADU F A. A study on iterative methods for solving Richards' equation[J]. *Computational Geosciences*, 2016, 20(2): 341 – 353.
- [13] WU Lizhou, HUANG Jinsong, FAN Wen, et al. Hydro-mechanical coupling in unsaturated soils covering a non-deformable structure[J]. *Computers and Geotechnics*, 2020, 117: 103287.
- [14] 朱帅润, 吴礼舟. 加速型改进迭代法在非饱和土渗流中的应用研究[J]. *岩土力学*, 2022, 43(3): 697 – 707. [ZHU Shuairun, WU Lizhou. Application research of accelerated modified iteration method in unsaturated flow[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2022, 43(3): 697 – 707. (in Chinese with English abstract)]
- [15] PARLANGE J Y, HOGARTH W L, BARRY D A, et al. Analytical approximation to the solutions of Richards' equation with applications to infiltration, ponding, and time compression approximation[J]. *Advances in Water Resources*, 1999, 23(2): 189 – 194.
- [16] WARRICK A W, ISLAS A, LOMEN D O. An analytical solution to Richards' equation for time-varying infiltration[J]. *Water Resources Research*, 1991, 27(5): 763 – 766.
- [17] KU Chengyu, LIU C Y, SU Yan, et al. Modeling of transient flow in unsaturated geomaterials for rainfall-induced landslides using a novel spacetime collocation method[J]. *Geofluids*, 2018: 7892789.
- [18] ZHA Yuanyuan, YANG Jinzhong, YIN Lihe, et al. A modified Picard iteration scheme for overcoming numerical difficulties of simulating infiltration into dry soil[J]. *Journal of Hydrology*, 2017, 551: 56 – 69.
- [19] 朱帅润, 李绍红, 钟彩尹, 等. 时间分数阶的非饱和渗流数值分析及其应用[J]. *应用数学和力学*, 2022, 43(9): 966 – 975. [ZHU Shuairun, LI Shaohong, ZHONG Caiyin, et al. Numerical analysis of time fractional-order unsaturated flow and its application[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(9): 966 – 975. (in Chinese with English abstract)]
- [20] 罗晓辉, 朱帅润, 陈骄锐, 等. 采用改进的SOR迭代法模拟一维非饱和土渗流的研究[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2021, 52(9): 3331 – 3340. [LUO Xiaohui, ZHU Shuairun, CHEN Jiaorui, et al. Simulation of one-dimensional infiltration using improved SOR iterative methods in unsaturated soils[J]. *Journal of Central South University(Science and Technology)*, 2021, 52(9): 3331 – 3340. (in Chinese with English abstract)]
- [21] LIU C Y, KU Chengyu, HUANG Chichao. Numerical solutions for groundwater flow in unsaturated layered soil with extreme physical property contrasts[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation*, 2015, 16(7/8): 325 – 335.
- [22] 陈国芳, 吴丹, 吕俊良. 求解渗流方程的一种修正的中心型有限体积法[J]. *吉林大学学报(理学版)*,

- 2020, 58(5): 1135 – 1141. [CHEN Guofang, WU Dan, LV Junliang. A modified cell-centered finite volume method for solving filtration equations[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2020, 58(5): 1135 – 1141. (in Chinese with English abstract)]
- [23] POP I S, RADU F, KNABNER P. Mixed finite elements for the Richards' equation: Linearization procedure[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004, 168(1/2): 365 – 373.
- [24] CHÁVEZ-NEGRETTE C, DOMÍNGUEZ-MOTA F J, SANTANA-QUINTEROS D. Numerical solution of Richards' equation of water flow by generalized finite differences[J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, 101: 168 – 175.
- [25] 吴梦喜. 饱和-非饱和土中渗流Richards方程有限元算法[J]. *水利学报*, 2009, 40(10): 1274 – 1279. [WU Mengxi. Finite-element algorithm for Richards' equation for saturated-unsaturated seepage flow[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2009, 40(10): 1274 – 1279. (in Chinese with English abstract)]
- [26] ZAMBRA C E, DUMBSER M, TORO E F, et al. A novel numerical method of high-order accuracy for flow in unsaturated porous media[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, 89(2): 227 – 240.
- [27] DENG Baoqing, WANG Junye. Saturated-unsaturated groundwater modeling using 3D Richards equation with a coordinate transform of nonorthogonal grids[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 50(10): 39 – 52.
- [28] DOLEJŠÍ V, KURAZ M, SOLIN P. Adaptive higher-order space-time discontinuous Galerkin method for the computer simulation of variably-saturated porous media flows[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, 72: 276 – 305.
- [29] 郑川东, 刘广宁, 杨中华, 等. 基于梯度准则的动态局部自适应网格在浅水水流水质耦合模型求解中的应用[J]. *武汉大学学报(工学版)*, 2021, 54(9): 784 – 794. [ZHENG Chuandong, LIU Guangning, YANG Zhonghua, et al. Application of dynamic local adaptive grid based on gradient criterion in solving shallow water hydrodynamics-water quality coupling model[J]. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2021, 54(9): 784 – 794. (in Chinese with English abstract)]
- [30] 何金辉, 李明广, 陈锦剑, 等. 考虑动态流体网格的颗粒-流体耦合算法[J]. *上海交通大学学报*, 2021, 55(6): 645 – 651. [HE Jinhui, LI Mingguang, CHEN Jinjian, et al. Particle-fluid coupling algorithm considering dynamic fluid mesh[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2021, 55(6): 645 – 651. (in Chinese with English abstract)]
- [31] BIANCHI G, RANE S, KOVACEVIC A, et al. Deforming grid generation for numerical simulations of fluid dynamics in sliding vane rotary machines[J]. *Advances in Engineering Software*, 2017, 112: 180 – 191.
- [32] LEHMANN F, ACKERER P. Comparison of iterative methods for improved solutions of the fluid flow equation in partially saturated porous media[J]. *Transport in Porous Media*, 1998, 31: 275 – 292.
- [33] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. *Soil Science*, 1958, 85(4): 228 – 232.
- [34] WU Lizhou, ZHU Shuairun, PENG Jianbing. Application of the Chebyshev spectral method to the simulation of groundwater flow and rainfall-induced landslides[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, 80: 408 – 425.
- [35] LIU C S. A two-side equilibration method to reduce the condition number of an ill-posed linear system[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2013, 91(1): 17 – 42.
- [36] TRACY F T. Clean two- and three-dimensional analytical solutions of Richards' equation for testing numerical solvers[J]. *Water Resources Research*, 2006, 42(8): 1 – 11.
- [37] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, 44(5): 892 – 898.

编辑: 汪美华
实习编辑: 刘真真