

离散光滑插值方法在地球物理位场中的快速实现

孟小红,侯建全,梁宏英,胡朝顺  
(中国地质大学,北京 100083)

摘 要: 研究并探讨了 1 种新的插值方法—离散光滑插值方法及其在地球物理位场中的快速实现。首先由待插值点与已知点之间的拓扑关系建立线性约束,进一步结合位场满足 Laplace 方程,建立离散光滑插值联立方程组,采用预条件共轭梯度求解该方程组。为更好地提高计算效率,在求解过程中采用螺旋坐标系和 Wilson-Burg 谱分解,将二维数据转换到一维空间处理。通过理论模型和实际资料计算,该方法适合地球物理位场特征,插值效果好,速度快。

关键词: 离散光滑插值; 预条件共轭梯度; 螺旋坐标系; 谱分解

中图分类号: P631      文献标识码: A      文章编号: 1000—8918(2002)04—0302—05

在地球物理数据处理中,数据不完整是一种常见的现象。数据缺失不仅仅意味着丢失一些信息,更重要的是它会在各种处理过程中产生许多不必要的噪声,对分辨率和信噪比都有影响。另外,从算法角度来说,现在的许多算法都是针对均匀分布数据的,由于数据不完整或者数据缺失,会造成算法不能运行或运行结果不可预测,因此,对带有噪声的不规则离散数据进行网格重建,是地球物理数据处理和解释的首要问题。

在位场网格化问题中,常用的方法有最小曲率方法<sup>[1,2]</sup>、广义等效源方法<sup>[3]</sup>、克里格方法<sup>[4]</sup>以及样条函数法<sup>[5,6]</sup>和高斯函数逼近法等,这些方法均有各自的理论模型和特点,得到了广泛的应用,但同时又分别有各自的局限性。比如,广义等效源法在稀疏控制点区域不满足该方法的求解条件;克里格方法的求解速度依赖于调节参数(半径、点数等);样条方法当遇到不规则点疏密分布非常不均时,拟合函数会有较大起伏,不符合光滑的性质;高斯函数逼近法中高斯函数权系数的选择有一定的任意性,当要插值的网格点与观测点距离较远时,拟和结果对权系数的依赖较大,因此,当某些部位观测数据相对较少时,插值结果不确定性较大。

笔者针对中高山区航磁不均匀测线高精度网格化问题,采用离散光滑插值思想和线性拓扑关系约束建立插值方程,用共轭梯度法求解,并采用预条件

提高插值精度和速度;同时,在实现预条件方法时,引入螺旋坐标系谱分解,将二维数据转换到一维空间处理。理论模型和实际资料计算结果表明,本方法适合地球物理位场特征,插值效果好,速度快。

1 方法原理

1.1 离散光滑插值

离散光滑插值(DSI)技术是法国 Nancy 大学 J. L. Mallet 教授提出的<sup>[7]</sup>,目前已成为 GOCAD 软件(地质模型计算机辅助设计)的核心技术。DSI 技术的基本内容是,对一个离散化的自然体模型,建立相互之间联络的网络,如果网络上的点值满足某种约束条件,则未知结点上的值可以通过解一个线性方程得到。离散光滑插值的数学描述如下。

设  $\varphi(k)$  是定义在所有网格结点  $k \in \Omega$  上的函数,并且仅在  $\Omega$  的子集上,  $\varphi(k)$  已知;  $L$  为节点  $l \in \Omega$  的集合,  $\varphi(l)$  已知;  $I$  为节点  $i \in \Omega$  的集合,  $\varphi(i)$  未知,  $I = \Omega - L$ 。

定义在  $\Omega$  上的函数  $\varphi(k)$  通过已知点  $\{\varphi(l) : l \in L\}$  的插值结果是无穷的,DSI 的目标是从这些函数中确定使给定准则  $R^*(\varphi)$  最小的函数,这个准则等于下面 2 部分之和

$$R^*(\varphi) = R(\varphi) + \rho(\varphi), \tag{1}$$

其中:  $R(\varphi)$  是函数  $\varphi(\cdot)$  的全局粗糙度;  $\rho(\varphi)$  是函数  $\varphi(\cdot)$  必须满足的约束条件。

1.2 全局粗糙度准则  $R(\varphi)$  定义

设  $R(\varphi|k)$  为定义在节点  $k$  上的局部粗糙度, 有如下公式

$$R(\varphi|k) = \left| \sum_{\alpha \in N(k)} v^{\alpha}(k) \varphi(\alpha) \right|^2, \tag{2}$$

这里  $\{v^{\alpha}(k)\}$  是给定的权系数, 可以是正数、负数或零,  $N(k)$  表示节点  $k$  的邻域。

用  $R(\varphi|k)$  来构造全局粗糙度  $R(\varphi)$ , 有如下定义:

$$R(\varphi) = \sum_k \mu(k) R(\varphi|k), \tag{3}$$

这里  $\mu(k)$  是 1 个定义在  $\Omega$  上给定的非负权函数。  $R(\varphi)$  可以由被给定的值  $\{v^{\alpha}(k)\}$  和  $\mu(k)$  完全确定。实际上, 如果

$$\sigma(k) = \sum_{\alpha \in N(k), \alpha \neq k} v^{\alpha}(k), \tag{4}$$

$$\bar{\sigma}(k) = \frac{1}{\sigma(k)} \sum_{\alpha \in N(k), \alpha \neq k} v^{\alpha}(k) \sigma(\alpha), \tag{5}$$

很容易看出  $R(\varphi|k)$  正比于  $\varphi(\alpha)$  和  $\bar{\varphi}(\alpha)$  之差的平方

$$R(\varphi|k) = \sigma^2(k) |\varphi(k) - \bar{\varphi}(k)|^2, \tag{6}$$

如果系数  $\{v^{\alpha}(k)\}$  有如下形式

$$v^{\alpha}(k) \cong c, \forall \alpha \in N(k), \alpha \neq k, \tag{7}$$

值  $\bar{\varphi}(k)$  表示节点  $k$  周围的  $\{\varphi(\alpha)\}$  的局部平均, 并且直观上

$$\varphi(\alpha) = \bar{\varphi}(\alpha), \tag{8}$$

相当于在节点  $k$  上一个“平滑”解。这就是为什么  $R(\varphi|k)$  被叫做“局部粗糙度”。

1.3 约束条件  $\rho(\varphi)$

对于  $N$  维行矩阵  $A_i$  和 1 个常数  $b_i$ , 定义

$$A_i \cdot \varphi \cong b_i, \tag{9}$$

这里“ $\cong$ ”表示对于 1 个给定的正系数  $\omega_i^2, \omega_i^2 |A_i \cdot \varphi - b_i|^2$  应尽可能的小。

如果这种类型的几种约束条件存在, 这些约束条件的违反度可以用  $\rho(\varphi)$  来度量, 有如下定义

$$\rho(\varphi) = \sum \omega_i^2 |A_i \cdot \varphi - b_i|^2, \tag{10}$$

1.4 利用离散光滑插值进行位场数据网格化

根据离散光滑插值思想, 局部粗糙度实际上是插值节点附近的方差, 全局粗糙度最小也就是插值点附近方差趋于零, 即

$$\sigma(k) = \bar{\sigma}(k) = \frac{1}{\sigma(k)} \sum_{\alpha \in N(k), \alpha \neq k} v^{\alpha}(k) \sigma(\alpha), \tag{11}$$

另一方面, 众所周知, 位场在场源以外满足 Laplace 方程, 是调和函数, 调和函数的性质之一是原点上的值等于周围的平均值, 因此全局粗糙度最小等同于位场满足 Laplace 方程。此外在位场数据中待插值

点与已知点上的值不是独立的, 它们满足某种约束条件(后面给出约束矩阵的确定方法), 给出约束关系  $Fx=d$ , 位场数据网格化归结为解下列问题

$$\begin{cases} \nabla^2 x = 0 \\ Fx = d \end{cases} \tag{12}$$

其中,  $A = \nabla^2$ 。可见, 离散光滑插值所得到的网格化方程, 实质上形如一般的地球物理问题。

已知点和待插值点之间的约束方程  $Fx=d$ , 即拓扑关系的建立采用以下思想(图 1)。

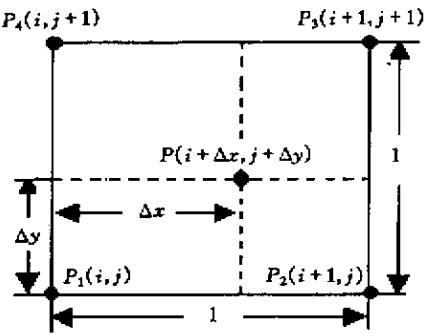


图 1 拓扑关系示意

从图中可看出已知点  $P$  与周围邻域上的待插值点上的拓扑关系, 以线性为例。

1. 首先根据已知点  $P$  的坐标找出  $P$  点邻域内待插值点的序号  $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ 。
2. 根据待插值点的序号找出待插值点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的坐标。
3. 由已知点  $P$  的坐标和待插值点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  的坐标, 分别获得已知点  $P$  对待插值点贡献的权系数  $(W_x, W_y)$

$$P_1 \text{—}(\Delta x, \Delta y); P_2 \text{—}(1-\Delta x, \Delta y);$$

$$P_3 \text{—}(1-\Delta x, 1-\Delta y); P_4 \text{—}(\Delta x, 1-\Delta y)。$$

在实际应用中我们没有用四点拓扑, 而是采用已知点附近的八点拓扑, 基本原理类似。

2 算法

首先, 由待插值点与已知点之间的拓扑关系(约束条件)和位场满足 Laplace 方程建立离散光滑网格化方程

$$\begin{cases} Fx - d \approx 0 \\ Ax \approx 0 \end{cases} \tag{14}$$

然后, 利用螺旋坐标系<sup>[8]</sup>思想将 Laplace 算子转化成一维算子, 用 Wilson—Burg 谱分解法<sup>[8]</sup>将  $A = \nabla^2$  分解为  $A = BB'$ , 将分解后的 Laplace 算子作为共轭梯度法求解的预条件方程<sup>[8,9]</sup>, 即

$Ax \approx 0 \rightarrow BB'x \approx 0,$  (16)

令  $x = (BB')^{-1}y$ , 代入到  $F(BB')^{-1} \approx 0$ , 写成

$Fy - d \approx y,$  (19)

对上式经过预条件处理的方程, 用共轭梯度迭代求解<sup>[9]</sup>, 得到  $y$ 。

最后, 求解  $x$

$x = (BB')^{-1}y。$  (20)

3 理论模型与实际应用

理论模型为一个大球体产生的区域场和 5 个小球体产生的局部场的叠加, 球体垂直磁化, 异常为  $\Delta T$ , 理论异常点数为  $31 \times 31$ , 点距 200 个单位(图 2)。对理论异常点线抽稀, 抽成  $16 \times 16$ , 沿着测线方向加入正弦抖动, 以模拟测线不规则, 并进一步挖去了局部测点, 用以模拟不可测的自然环境(图 3)。对正弦抖动测线上局部严重缺失的数据值进行网格化, 插值成  $31 \times 31$  规则网上的值, 结果见图 4。

规则网格上理论异常的最大值为 289.51, 最小值为  $-3.332\ 75$ , DSI 方法插值到规则网上后对应点的最大为 289.765, 最小值为  $-3.872\ 72$ , 插值后在规则网格节点上理论值与插值结果的标准方差为 0.425 3, 标准方差的计算如下:

$$\sum = \frac{1}{N \times N} \sqrt{\sum \sum [c_{\text{理论}}(i, j) - c_{\text{插值}}(i, j)]^2}$$
$$= 0.425\ 3。$$

用 Surf 软件中的克里格方法作了插值效果(图 5)对比, 克里格方法插值到规则网上后对应点的最大值为 325.437, 最小值为  $-3.793\ 9$ , 标准方差为 0.489 4。

实际资料为云南大理丽江航磁资料, 共 27 条测线, 线距约 2 km, 每条测线上的点数不同, 最多约 7 000 个点、最少约近 4 000 个点, 平均约 5 000 个点, 点距约 50 m。为最大限度地保留实测信息, 网格化点线距为: 54 条线(线距约 1 000 m), 5 400 个

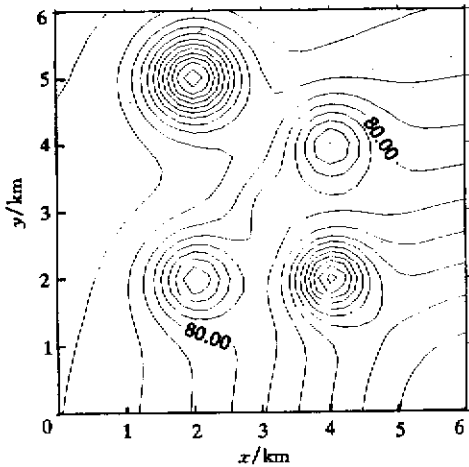


图 2 理论模型结果

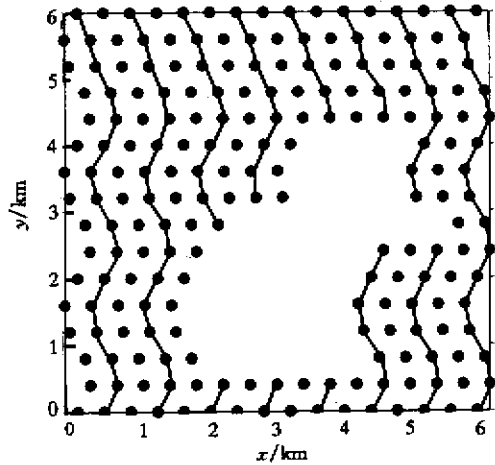


图 3 点线抽稀加正弦抖动及局部缺失

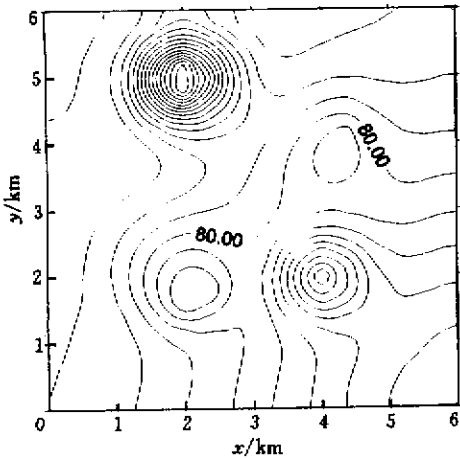


图 4 DSI 网格化结果

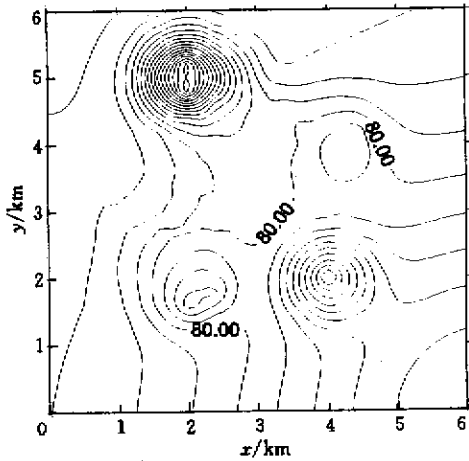


图 5 kriging 方法网格化结果

点(点距约 50 m)。图 6 为用本文方法和 Surf 软件中克里格方法进行的网格化效果对比。实测资料最大值为 577.052,最小值为 -389.998,DSI 方法网格化结果最大值为 577.052,最小值为 -389.998,在内存 128 兆、主频 650 的微机上迭代 200 次(完全收敛),耗时不到 5 min。Kriging 方法网格化结果最大值为 549.329,最小值为 -373.024,在相同的计算机上完成网格化需要 40 min 左右。

4 结束语

本方法适合地球物理位场特征,网格化效果好,精度高,速度快。

参考文献

[1] Briggs I. Machaine contouring using minimum curvature[J]. Geophysics, 1974,39:39-48.

[2] Webring M. MINC: A gridding program based on minimum curvature[M]. U. S. Geol. Surv., Open File Rep., 1981,81-1230.

[3] Cordell L. A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimension[J]. Geophysics, 1992,57:629-636.

[4] Hansen R. Interpretive gridding by anisotropic kriging[J]. Geophysics, 1993,58, 1491-1497.

[5] Forsey D R, Bartels R H. Hierarchical B-Spline Refinement [J]. Computer Graphics, 1988,22(4):205-212.

[6] Lee S, Wolberg G, Shin S Y. Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines[R]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1997,3(3):228-244.

[7] Mallet J L. Discrete smooth interpolation in geometric modeling[J]. Computer-aided design, April 1992,24(4).

[8] Claerbout J F. Geophysical Estimation By Sample[R]. Document available on the World Wide(mosaic), 2000.

[9] Claerbout J F. Fundamentals of Geophysical Data Processing [R]. Blackwell Scientific Publications, 1985.

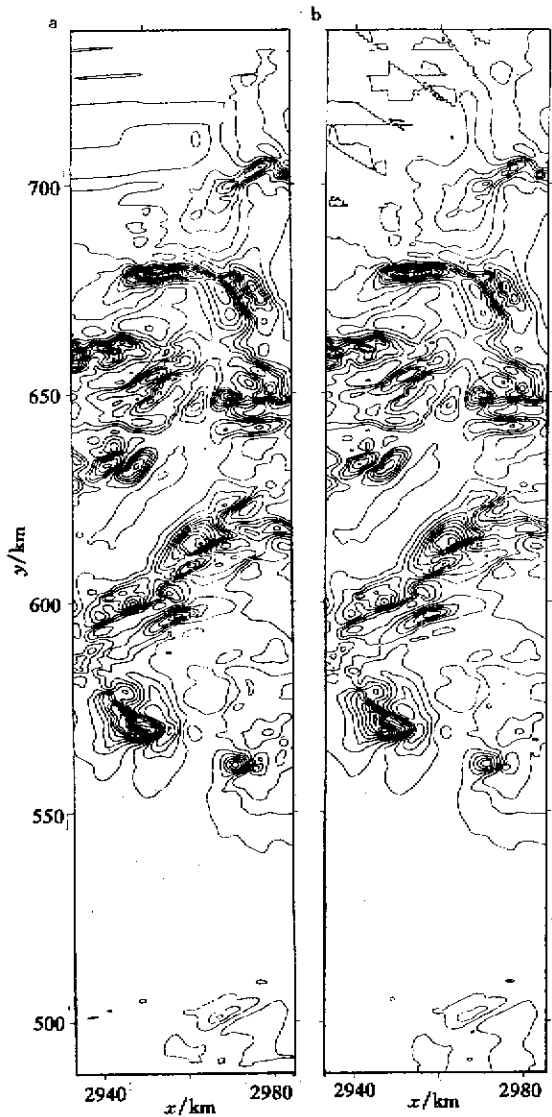


图 6 丽江航磁资料 2 种方法网格化效果对比  
a—DSI 方法;b—Kriging 方法

THE FAST REALIZATION OF DISCRETE SMOOTH INTERPOLATION  
IN THE INTERPOLATION OF POTENTIAL DATA

MENG Xiao-hong, HOU Jian-quan, LIANG Hong-ying, HU Chao-shun  
(China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

**Abstract:** This paper presents a new method-Discrete Smooth Interpolation method (DSI) and its fast realization in geophysical potential data gridding. First the topological relations between the unknown points and known points are built as a linear constrain, then the DSI equation group is formulated by combining Laplace equation with the linear constrain equation. The preconditioning conjugate-direction descend method is used to seek the solution and speed up the solving. To improve the efficiency

