

· 连载 ·

起伏地形上规则二度体复重磁场正演和直接反演

安 玉 林

(中国地质大学, 北京 100083)

中图分类号: P631

文献标识码: A

文章编号: 1000-8918(2003)03-0206-06

上接 119 页

9 反演方法推导中的有关公式

为了对复场展开式作简化表示, 将会多次用到 2 个递推公式, 这里预先导出。

设:

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i=1}^n \sigma_i, & x_2 = \sum_{i,j=1}^n \sigma_i \sigma_j, (i < j) \\ x_3 = \sum_{i,j,k=1}^n \sigma_i \sigma_j \sigma_k, & (i < j < k), \dots, \\ x_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n, \end{cases} \quad (9.1)$$

则有展开式

$$\begin{aligned} (S - \sigma_1)(S - \sigma_2) \dots (S - \sigma_n) = \\ S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \\ \dots + (-1)^n x_n. \end{aligned} \quad (9.2)$$

若令:

$$(S - \sigma_1)(S - \sigma_2) \dots (S - \sigma_n) = 0, \quad (9.3)$$

则有

$$S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \dots + (-1)^n x_n = 0, \quad (9.4)$$

说明 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 是以 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为系数的复高阶方程(9.4)的 n 个根。(9.4)式还可以写为

$$S^n = S^{n-1} x_1 - S^{n-2} x_2 + \dots + (-1)^n x_n. \quad (9.5)$$

根据代数学定理, 复高阶方程(9.4)具有唯一的 n 个复根。

若从 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 中去掉 σ_k , 再由 $n-1$ 个 σ 组成 $x_{1(k)}, x_{2(k)}, \dots, x_{(n-1)(k)}$, 则有下列各式:

$$x_{1(k)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i \right\}_{i \neq k} = x_1 - \sigma_k, \quad (9.6)$$

$$x_{2(k)} = \left\{ \sum_{i,j=1}^n \sigma_i \sigma_j \right\}_{(i < j, i, j \neq k)} =$$

$$x_2 - \sigma_k(x_1 - \sigma_k) = x_2 - \sigma_k x_{1(k)}, \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} x_{3(k)} &= \left\{ \sum_{i,j,k=1}^n \sigma_i \sigma_j \sigma_l \right\}_{(i < j < l, i, j, l \neq k)} = \\ &= x_3 - \sigma_k [x_2 - \sigma_k(x_1 - \sigma_k)] = \\ &= x_3 - \sigma_k x_{2(k)} \end{aligned} \quad (9.8)$$

其通式为

$$\begin{aligned} x_{m(k)} &= x_m - \sigma_k x_{(m-1)(k)}, \\ m &= 1, 2, \dots, n-1, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9.9)$$

若从 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 中去掉 σ_k, σ_l , 由 $n-2$ 个 σ 组成 $x_{1(kl)}, x_{2(kl)}, \dots, x_{(n-2)(kl)}$, 则可导出下列各式:

$$\begin{aligned} x_{1(kl)} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sigma_i \right\}_{(i \neq k, l)} = \\ &= x_1 - (\sigma_k + \sigma_l), \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} x_{2(kl)} &= \left\{ \sum_{i,j=1}^n \sigma_i \sigma_j \right\}_{(i < j, i, j \neq k, l)} = \\ &= x_2 - (\sigma_k + \sigma_l) x_{1(kl)} - \sigma_k \sigma_l, \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} x_{3(kl)} &= \left\{ \sum_{i,j,m=1}^n \sigma_i \sigma_j \sigma_m \right\}_{(i < j < m, i, j, m \neq k, l)} = \\ &= x_3 - (\sigma_k + \sigma_l) x_{2(kl)} - \sigma_k \sigma_l x_{1(kl)} \end{aligned} \quad (9.12)$$

其通式为

$$\begin{cases} x_{p(kl)} = x_p - (\sigma_k + \sigma_l) x_{(p-1)(kl)} - \sigma_k \sigma_l x_{(p-2)(kl)}, \\ p = 1, 2, \dots, n-2, \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (9.13)$$

递推公式(9.9)、(9.13)的重要性在于大大简化了理论推导和程序设计。

10 二角点无限形体复场反演

二角点无限形体包括顶面倾斜无限厚板、半无限水平层、对称背斜、非对称背斜等, 它们的复场具

收稿日期: 2002-03-10

基金项目: 国家自然科学基金(49974027)和国土资源大调查项目(20002010002206)共同资助

有统一的反演方法。

10.1 确定角点位置和重磁矩 M

以 $F'(S)$ 代替 $T'(S)$ 和 $G''(S)$, 以 M 代替 $2fM_g$ 和 $2M_m$ (略去 $\mu_0/4\pi$ 对反演无影响), 有

$$F'(S) = M \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{(S - \sigma_1)(S - \sigma_2)}, \quad (10.1)$$

$$F'(0) = M \cdot \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

取比值 $F'(S)/F'(0)$, 有

$$\begin{cases} \frac{F'(S)}{F'(0)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(S - \sigma_1)(S - \sigma_2)}, \\ (S - \sigma_1)(S - \sigma_2) = \frac{F'(0)}{F'(S)} \cdot \sigma_1 \sigma_2, \end{cases} \quad (10.2)$$

即有

$$S^2 - S(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2 = \frac{F'(0)}{F'(S)} \cdot \sigma_1 \sigma_2. \quad (10.3)$$

除 $S=0, F'(0)$ 外, 再取 S_i, S_j 和 $F'(S_i), F'(S_j)$, 得联立方程组

$$\begin{cases} S_i(\sigma_1 + \sigma_2) - \left\{1 - \frac{F'(0)}{F'(S_i)}\right\} \sigma_1 \sigma_2 = S_i^2, \\ S_j(\sigma_1 + \sigma_2) - \left\{1 - \frac{F'(0)}{F'(S_j)}\right\} \sigma_1 \sigma_2 = S_j^2. \end{cases} \quad (10.4)$$

令

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_1 + \sigma_2, & x_2 = \sigma_1 \sigma_2, \\ W_i = 1 - [F'(0)/F'(S_i)], \\ W_j = 1 - [F'(0)/F'(S_j)], \end{cases} \quad (10.5)$$

(10.4) 式变为

$$\begin{cases} S_i x_1 - W_i x_2 = S_i^2, \\ S_j x_1 - W_j x_2 = S_j^2. \end{cases} \quad (10.6)$$

采用消元法求解 x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = [W_i S_j^2 - W_j S_i^2] / [W_i S_j - W_j S_i], \\ x_2 = [S_i S_j (S_j - S_i)] / [W_i S_j - W_j S_i], \end{cases} \quad (10.7)$$

由 x_1, x_2 组成二次方程

$$\sigma^2 - x_1 \sigma + x_2 = 0 \quad (10.8)$$

解得

$$\sigma_1 = (x_1/2) + \sqrt{(x_1/2)^2 - x_2}, \quad (10.9)$$

$$\sigma_2 = (x_1/2) - \sqrt{(x_1/2)^2 - x_2}.$$

有了 σ_1, σ_2 , 再由 (10.1) 得到

$$M = F'(0) \cdot (\sigma_1 \sigma_2 / \sigma_2 - \sigma_1). \quad (10.10)$$

10.2 其它参数反演

10.2.1 顶面倾斜无限厚板

因为 σ_1, σ_2 已经求得, 则有

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(\sigma_2 - \sigma_1)}{\text{Re}(\sigma_2 - \sigma_1)} \right\}, \quad (10.11)$$

其中, α 取值由 $-180^\circ \sim 180^\circ$ (下同)。

又因重磁矩 M 已经求得, 且有

$$M = \begin{cases} 2fM_g = 2f\rho \sin(\beta - \alpha) e^{-i(\beta + \alpha)}, \\ 2M_m = 2\hat{M} \sin(\beta - \alpha) e^{-i(\beta + \alpha - I_s)}, \end{cases} \quad (10.12)$$

则进一步可由 M 求解其它参数。

(1) 重力:

$$\begin{aligned} \beta &= -\{\arctan(\text{Im}M/\text{Re}M) + \alpha\}, \\ |\rho| &= |M| / [2f \sin(\beta - \alpha)]. \end{aligned} \quad (10.13)$$

(2) 磁法:

给定 I_s :

$$\beta = -\arctan \left\{ \frac{\text{Im}M}{\text{Re}M} \right\} + (\alpha - I_s), \quad (10.14)$$

$$|\hat{M}| = |M| / \{2 \sin(\beta - \alpha)\}$$

给定 β :

$$I_s = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}M}{\text{Re}M} \right\} + (\beta - \alpha), \quad (10.15)$$

$$\hat{M} = |M| / \{2 \sin(\beta - \alpha)\}.$$

给定 $\hat{M}$: 因为 $\arcsin$ 函数是多值函数, 因此, 为了考虑 β 是否大于 90° , 要由方程组

$$\begin{cases} \sin(\beta - \alpha) = |M| / (2\hat{M}) \\ I_s - \beta = \arctan(\text{Im}M/\text{Re}M) + \alpha \end{cases} \quad (10.16)$$

联合确定 β 和 I_s 值。该方程组有两组解。

10.2.2 半无限水平层

由 σ_1, σ_2 得

$$\beta = \arctan \frac{\text{Im}(\sigma_2 - \sigma_1)}{\text{Re}(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (10.17)$$

又因

$$M = \begin{cases} 2fM_g = 2f\rho \sin\beta e^{-i\beta} \\ 2M_m = 2\hat{M} \sin\beta e^{-i(\beta - I_s)} \end{cases} \quad (10.18)$$

已求得, 可由 M 求其它参数。

(1) 重力:

$$\beta = -\arctan \frac{\text{Im}M}{\text{Re}M}, \quad |\rho| = \frac{|M|}{2f \sin\beta}. \quad (10.19)$$

(2) 磁法:

$$I_s = \arctan \frac{\text{Im}M}{\text{Re}M} + \beta, \quad \hat{M} = \frac{|M|}{2 \sin\beta}. \quad (10.20)$$

10.2.3 两翼对称背斜

由已知的重磁矩 M

$$M = \begin{cases} 2fM_g = -2f\rho \sin 2\beta \\ 2M_m = -2\hat{M} \sin 2\beta e^{iI_s}, \end{cases} \quad (10.21)$$

求解其它参数。

(1) 重力: 给定 ρ

$$\beta = 1/2 \arcsin \{-M/2f\rho\}. \quad (10.22)$$

(2) 磁法:

$$I_s = \arctan[\operatorname{Im}(-M)/\operatorname{Re}(-M)]。 (10.23)$$

给定 $\hat{M}$:

$$\beta = 1/2\arcsin\{|M|/2\hat{M}\}。 (10.24)$$

给定 β :

$$\hat{M} = |M|/2\sin 2\beta。 (10.25)$$

10.2.4 两翼非对称背斜

在求得重磁矩 M 后,可由

$$M = \begin{cases} 2fM_g = 2f\rho\sin(\beta_2 - \beta_1)e^{-i(\beta_2 + \beta_1)} \\ 2M_m = 2\hat{M}\sin(\beta_2 - \beta_1)e^{-i(\beta_2 + \beta_1 - I_s)} \end{cases} (10.26)$$

求其它参数。

(1)重力:

给定 β_1 或 β_2 :

$$\beta_2 = -\{\arctan^*(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) + \beta_1\}, (10.27)$$

$$\beta_1 = -\{\arctan^*(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) + \beta_2\}, (10.28)$$

$$|\rho| = |M|/[2f\sin(\beta_2 - \beta_1)]。 (10.29)$$

给定 ρ : 同样,为了考虑 β_2 是否大于 90° ,要由方程组

$$\begin{cases} \sin(\beta_2 - \beta_1) = \frac{|M|}{2\rho} \\ \beta_2 + \beta_1 = -\arctan(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) \end{cases} (10.30)$$

联合求解 β_1, β_2 值。该方程组有两组解。

(2)磁法:

给定 β_1 和 β_2 :

$$I_s = \arctan(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) + (\beta_1 + \beta_2), (10.31)$$

$$\hat{M} = |M|/[2\sin(\beta_2 - \beta_1)]。 (10.32)$$

给定 $\hat{M}, I_s$: 此时,要由联立方程组

$$\begin{cases} \sin(\beta_2 - \beta_1) = |M|/2\hat{M}, \\ \beta_2 + \beta_1 = I_s - \arctan(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) \end{cases} (10.33)$$

来求解 β_1, β_2 值,可得到两组解。

给定 $\hat{M}, \beta_1$ 或 β_2 : 同样,要由联立方程组

$$\begin{cases} \sin(\beta_2 - \beta_1) = |M|/2\hat{M} \\ I_s - (\beta_1 + \beta_2) = \arctan(\operatorname{Im}M/\operatorname{Re}M) \end{cases} (10.34)$$

求解 I_s, β_2 或 β_1 。

11 倾斜椭圆柱体复场反演

11.1 确定 σ_0, β 和重磁矩 M

以 $F'(S)$ 代替 $T'(S), G''(S)$, 以 M 代替 $2fM_g, 2M_m (\mu_0/4\pi \text{ 略})$, 由(4.14)式有

$$\begin{aligned} F'(S) &= M \cdot \frac{c_*^2}{\{(S - \sigma_0)^2 - c_*^2\}^{\frac{3}{2}}}, \\ F'(0) &= M \cdot \frac{c_*^2}{\{\sigma_0^2 - c_*^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} (11.1)$$

$F'(S)$ 与 $F'(0)$ 的比值为

$$\frac{F'(S)}{F'(0)} = \left\{ \frac{\sigma_0^2 - c_*^2}{(S - \sigma_0)^2 - c_*^2} \right\}^{\frac{3}{2}}, (11.2)$$

于是有

$$\frac{\sigma_0^2 - c_*^2}{(S - \sigma_0)^2 - c_*^2} = \left\{ \frac{F'(S)}{F'(0)} \right\}^{\frac{2}{3}}。 (11.3)$$

把(11.3)式展开并移项得

$$\begin{aligned} 2S\sigma_0 + C_s(\sigma_0^2 - c_*^2) &= S^2, \\ C_s &= \left\{ \frac{F'(0)}{F'(S)} \right\}^{\frac{2}{3}} - 1。 \end{aligned} (11.4)$$

把 σ_0 和 $(\sigma_0^2 - c_*^2)$ 作为未知数,再给定 $S_i, S_j, F'(S_i)$ 和 $F'(S_j)$ 值,于是有方程组

$$\begin{cases} 2S_i\sigma_0 + C_i(\sigma_0^2 - c_*^2) = S_i^2, \\ 2S_j\sigma_0 + C_j(\sigma_0^2 - c_*^2) = S_j^2 \end{cases}, (11.5)$$

采用消元法,容易得到解,即

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{2} \frac{C_j S_i^2 - C_i S_j^2}{C_j S_i - C_i S_j}, \\ (\sigma_0^2 - c_*^2) &= \frac{S_j^2 S_i - S_i^2 S_j}{C_j S_i - C_i S_j} = D_{ij}。 \end{aligned} (11.6)$$

由(11.6)得

$$c_* = \{\sigma_0^2 - D_{ij}\}^{\frac{1}{2}}。 (11.7)$$

因为 $c_* = ce^{i\beta}$, 故有

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} = |c_*|, \\ \beta &= \arctan(\operatorname{Im}c_*/\operatorname{Re}c_*) \end{aligned} (11.8)$$

有了 σ_0, σ_* 后,再由(11.1)式得到

$$M = F'(0) \frac{\{\sigma_0^2 - c_*^2\}^{\frac{3}{2}}}{c_*^2}。 (11.9)$$

11.2 给定 ρ 确定 a, b

由(8.5)和(11.8)得到

$$|M| = 4\pi f\rho \frac{ab}{c^2} = 4\pi f\rho \frac{ab}{|c_*|^2}, (11.10)$$

故有 $ab = \frac{|M|}{4\pi f\rho} |c_*|^2$ 和

$$\begin{aligned} b^2 &= \left\{ \frac{|M|}{4\pi f\rho} \right\}^2 \frac{|c_*|^4}{a^2}, \\ a^2 - b^2 &= |c_*|^2。 \end{aligned} (11.11)$$

由上式得到关于 a^2 的方程

$$\{a^2\}^2 - |c_*|^2 a^2 - \left\{ \frac{|M|}{4\pi f\rho} |c_*|^2 \right\}^2 = 0, (11.12)$$

$$a^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{|M|}{2\pi f\rho} \right)^2} \right\} |c_*|^2, (11.13)$$

于是得到

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{|M|}{2\pi\hat{M}}\right)^2}} |c_*|, \quad (11.14)$$

$$b = \frac{1}{a} \frac{M}{4\pi\hat{M}} |c_*|^2$$

11.3 给定 $\hat{M}$ 确定 a, b, I_s

由(4.13)和(11.8)得到

$$M = 4\pi\hat{M} \frac{ab}{c_*^2} e^{i(I_s - 2\beta)} = 4\pi\hat{M} \frac{ab}{|c_*|^2} e^{i(I_s - 2\beta)}, \quad (11.15)$$

故有

$$I_s = \arctan \frac{\text{Im}M}{\text{Re}M} + 2\beta \quad (11.16)$$

和 $ab = \{|M|/4\pi\hat{M}\} |c_*|^2$, 以及

$$b^2 = \left\{ \frac{|M|}{4\pi\hat{M}} \right\}^2 \frac{|c_*|^4}{a^2}, \quad a^2 - b^2 = |c_*|^2. \quad (11.17)$$

类似(11.12) ~ (11.14), 有

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{|M|}{2\pi\hat{M}}\right)^2}} |c_*|, \quad (11.18)$$

$$b = \frac{1}{a} \frac{|M|}{4\pi\hat{M}} |c_*|^2.$$

11.4 复函数 C_i 值的计算方法

上面所列倾斜椭圆柱体复场反演公式是相当简单的,但出人意料的是,根据它们研制反演程序过程中,却遇到了极大的困难,即:不能在观测点任意分布的情况下都得到正确的反演结果。是正演表达式有错?还是反演公式不对?经反复检查,都没有问题。问题究竟出在哪里?!通过对理论模型反演过程的反复追踪,逐渐发现,问题出在(11.4)式表示的复变量函数 C_i 第一项 $C_i = \left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}^{2/3}$ 值的计算上。于是,不断改进该复函数值的计算方法,由观测点位于椭圆柱上方剖面时能获得正确的反演结果,直到观测点位于椭圆柱任意方位剖面上或位于包围椭圆柱的封闭线上时也能获得正确的反演结果。

$C_i = \left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}^{2/3}$ 值的计算方案有 2 种:① $C_i = \left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}^{2/3}$; ② $C_i = \exp(\ln C_i)$ 。第一种方案面临的困难是复数的立方根如何正确取值问题。我们没有采取这种方案。第二种方案的实际计算步骤是: $C_i = \exp\left\{ \frac{2}{3} \ln\left(\frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right) \right\}$, 即先计算复数比,再计算该比值的对数,最后把该对数乘以 $2/3$,再求其指数值。

我们采取的是第二种方案。但是,第二种方案遇到对数虚部的多值问题,即 $\ln\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\} = \ln\left| \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right| + i\left\{ \text{Arg}\left[\frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right] + 2k_i\pi \right\}, k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \text{Arg}(\cdot)$ 表示取主值。 k_i 究竟取何值?如果 k_i 取值不正确,就不能得到 C_i 的正确计算结果。

k_i 取值问题又是一个十分棘手的问题,能否避开它?在这一想法的启发下,我们终于找到了如下正确计算 $\ln\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}$ 的算法。

首先由(11.5)建立求解 2 个未知数的超定方程组,目的是要引入稳定解法,消除数据中随机误差,获得可靠结果。为此,要连续计算出各观测点处的 C_i 值($i = 1, 2, \dots, N$)。由于观测点多而密, C_i 值的实部和虚部值也就多而密,可分别连成一条曲线。 C_i 的实部和虚部实际上是 $H'_a(x, z)$ 和 $Z'_a(x, z)$ 复合函数,由无源空间中 H_a, Z_a 及其导数的连续性和实变量复合函数连续性推知, C_i 实部和虚部曲线均应是连续的。

复变函数连续性理论指出:和实变函数一样,两个连续复函数的和、差、积、商(分母复函数值为 0 的点除外)仍为连续函数;连续复函数的复合函数也为连续函数。由于 $T'(s_i)$ 是 s_i 的连续函数,除无穷远点外不为 0,而 $T'(0)$ 是一个不为 0 的复数值,故比值 $\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}$ 关于 s_i 连续,即其实部和虚部是 s_i 的连续函数。又由于 $\exp\left\{ \frac{2}{3} \ln\left(\frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right) \right\}$ 在对数函数值连续情况下是 s_i 的单值连续函数,因此,要使 C_i 值的虚部连续,就要求 $\ln\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}$ 的虚部取值关于 s_i 连续。这一连续性要求,使我们可以避开 k_i 的取值问题,代之以逐点修改已求得的对数虚部值,使其在所有点处均连续的情况下,达到正确计算 C_i 虚部的目的。另外,分析表明, C_i 实部是连续的,不需特殊处理。

修改对数虚部值的方法是:①选剖面上第 i 点为复坐标原点 O ,则 $T'(0) = T'(s_i)$,比值 $\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\} = 1$,其对数实部和虚部值均为 0,导致 C_i 的实部和虚部值也为 0。②在其它所有点均取 $k = 0$,计算出对数虚部数值,它是比值 $\left\{ \frac{T'(0)}{T'(s_i)} \right\}$ 的幅角,以下简记为 Φ_i 。由于 Φ_i 取值区间为 $[-\pi, \pi]$, 帮对数虚部数值

曲线为 $-\pi \sim \pi$ 的曲线,且其上可能出现一个或多个 $\pi \leq \Delta\Phi \leq 2\pi$ 的阶梯,只是等号出现的概率极小。下面几步就是要消除所有阶梯,使对数虚部曲线连续。

③由连续性分析可知, $i-1$ 点和 $i+1$ 的 Φ 与 0 的差别不大,所以该 2 点的对数虚部数值不需修改;而其它各点的对数虚部值是否要修改,要由连续性判断来决定。

④对于 $i+2 \sim N$ 号点,要由 $i+2$ 号点开始向大号点逐点对对数虚部值作判断修改:求 $\Delta\Phi_j = \Phi_j - \Phi_{j-1}$,如果 $\{|\Delta\Phi_j| > \pi \text{ 和 } \Delta\Phi_j < 0\}$,则 Φ_j 加上 2π ;仍求 $\Delta\Phi_j$ 并作同样判断和修改,直至 $|\Delta\Phi_j| < \pi$ 为止;取 $j = i+2, \dots, N$ 逐点进行。

⑤对于 $i-2 \sim 1$ 号的点,要由 $i-2$ 号点开始向小号点对对数虚部值作判断修改:同样求 $\Delta\Phi_j = \Phi_j - \Phi_{j-1}$,如果 $\{|\Delta\Phi_j| > \pi \text{ 和 } \Delta\Phi_j < 0\}$,则 Φ_{j-1} 减去 2π ,如果 $\{|\Delta\Phi_j| > \pi \text{ 和 } \Delta\Phi_j > 0\}$,则 Φ_{j-1} 加上 2π ;仍求 $\Delta\Phi_j$ 并判断和修改,直至 $|\Delta\Phi_j| < \pi$ 为止;取 $j = i-1, \dots, 2$ 逐点进行。

⑥经对上面对对数虚部值修改之后,剖面线各点虚部值连线就成为一条连续曲线,曲线上最大值和最小值的绝对值均可能大于 $\pi, 2\pi$ 或更大;也就是说,剖面曲线各点对数虚部可能处于多页黎曼曲线之上。

11.5 理论模型验证

在《局部重磁场源全方位成像》一书 66 页给出的理论模型验证,已经证明了这种确定剖面各点的 $\ln\left\{\frac{T'(0)}{T'(s_i)}\right\}$ 虚部数值的方法是正确的,否则就不能在各种情况下,均得到复变量函数 C_i 的正确值和倾斜椭圆柱体各参数正确的反演结果。在本文中,作者仍采用该椭圆体模型,即: $\sigma_0 = (25, 25)$, $a = 7.5$, $b = 2.5$, $\beta = 135^\circ$, $M = 1\ 000$, $I_s = 45^\circ$ 。用于反演理论模型数据位于包围模型体的封闭曲面上,点号顺时针排列,坐标原点选在 35 号点上。模型和点位见图 14。图 15 给出了 2 条 $\ln\{T'(0)/T'(s_i)\}$ 虚部曲线:第一条是取 $k=0$ 计算出的具 3 个阶梯的虚部曲线;第二条是按上述方法由第一条曲线经修改得到的连续虚部曲线。采用理论计算出的 $T'(s)$ 值和图 15 中曲线路进行反演,椭圆柱参数反演结果与模型参数完全一致(精确到小数点后第 5 位)。采用理论计算出的 $T'(s)$ 值和图 15 中曲线 1 进行反演,椭圆柱参数反演结果为: $\sigma_0 = (22.824\ 8, 28.365\ 0)$, $a = 12.760$, $b = 1.819\ 2$, $\beta = 129.521\ 6^\circ$, $I_s = 86.672^\circ$;与模型参数差距很大。我们还以 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 等点和任何其它点为坐标原点,得到了完全类似的反演结果。这 2 种不同的反演结果,证明了上面所给出的修改 $\ln\left\{\frac{T'(0)}{T'(s_i)}\right\}$ 虚部值方法的正确性。

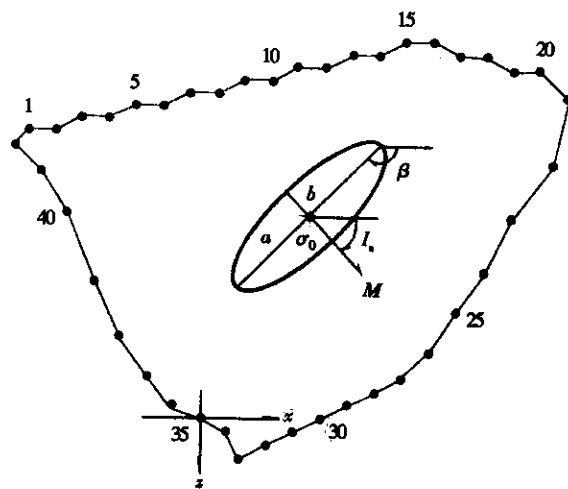


图 14 椭圆柱模型和观测点位分布

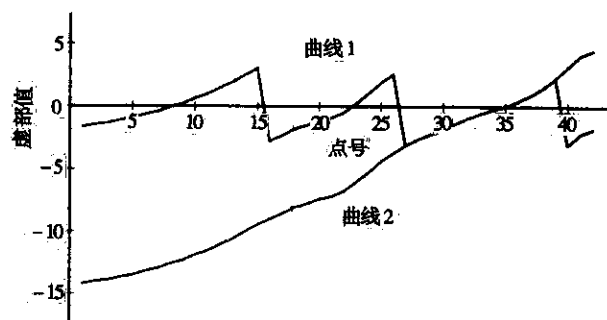


图 15 $\ln\{T'(0)/T'(s_i)\}$ 的虚部曲线

12 水平 n 棱柱体复场反演

12.1 复场导数展开

以 $F'(S)$ 代替 $G''(S)$ 和 $T'(S)$, 以 M 代替 $2fM_g$ 和 $2M_m$ 由 (6.7)、(8.14) 式, 有

$$F'(S) = M \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j}{(\sigma_j - S)(\sigma_{j+1} - S)} \quad (12.1)$$

把上式展开, 有

$$F'(S) = \frac{M}{(S - \sigma_1)(S - \sigma_2) \cdots (S - \sigma_n)} \cdot \{(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1)(S - \sigma_3)(S - \sigma_4) \cdots (S - \sigma_n) + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2)(S - \sigma_1)(S - \sigma_4) \cdots (S - \sigma_n) + \cdots + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_n)(S - \sigma_1)(S - \sigma_2) \cdots (S - \sigma_{n-2})\} = \frac{M}{\Phi(S)} \{\Phi_{21} + \Phi_{32} + \Phi_{43} + \cdots + \Phi_{ln}\} \quad (12.2)$$

由 (9.1)、(9.2) 和 (9.13) 式得

$$\begin{aligned} \Phi(S) &= (S - \sigma_1)(S - \sigma_2) \cdots (S - \sigma_n) = \\ &= S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \cdots + (-1)^n x_n, \\ \Phi_{21} &= (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) \{S^{n-2} - x_{1(12)} S^{n-3} + x_{2(12)} S^{n-4} - \cdots + (-1)^{n-2} x_{(n-2)(12)}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{32} &= (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2) \{ S^{n-2} - x_{1(23)} S^{n-3} + x_{2(23)} S^{n-4} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-2} x_{(n-2)(23)} \} . \\ \Phi_{43} &= (\bar{\sigma}_4 - \bar{\sigma}_3) \{ S^{n-2} - x_{1(34)} S^{n-3} + x_{2(34)} S^{n-4} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-2} x_{(n-2)(34)} \} . \\ \Phi_{1n} &= (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_n) \{ S^{n-2} - x_{1(n1)} S^{n-3} + x_{2(n1)} S^{n-4} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-2} x_{(n-2)(n1)} \} .\end{aligned}$$

把 $\Phi(S)$ 、 Φ_{21} 、 Φ_{32} 、 Φ_{43} 、 $\dots$ 、 Φ_{1n} 等代入(12.2)式,移项、合并、整理可得

$$\begin{aligned}S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \dots + (-1)^n x_n &= \\ \frac{M}{F'(S)} \cdot \{ S^{n-2} \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) - \\ S^{n-3} \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{1(jk)} + \\ S^{n-4} \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{2(jk)} + \dots \\ + (-1)^{n-2} \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{(n-2)(jk)} \} , \quad (12.3)\end{aligned}$$

式中, $k = j + 1$ 。因为 $\sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) = 0$, 且当 $S = 0$ 时, 由上式

$$M \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{(n-2)(jk)} = F'(0) x_n, \quad (12.4)$$

所以有

$$\begin{aligned}S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \dots + (-1)^n x_n &= \\ \frac{1}{F'(S)} \cdot \{ -S^{n-3} x_{(2n-3)} + S^{n-4} x_{(2n-4)} - \dots \\ + (-1)^{n-3} S x_{(n+1)} \} + (-1)^{n-2} \frac{F'(0)}{F'(S)} x_n . \quad (12.5)\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{cases} x_{n+1} = M \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{(n-3)(jk)}, \\ x_{n+2} = M \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{(n-4)(jk)}, \dots, \\ x_{2n-4} = M \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{2(jk)}, \\ x_{2n-3} = M \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j) x_{1(jk)}, \end{cases} \quad (12.6)$$

再经整理得

$$\begin{aligned}S^{n-1} x_1 - S^{n-2} x_2 - \dots + \\ (-1)^{(n+1)} \left\{ 1 - \frac{F'(0)}{F'(S)} \right\} x_n +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{(n+1)} \frac{S}{F'(S)} x_{(n+1)} + \\ (-1)^{(n+2)} \frac{S^2}{F'(S)} x_{(n+2)} + \dots \\ + (-1)^{(2n-3)} \frac{S^{(n-3)}}{F'(S)} x_{(2n-3)} = S^n . \quad (12.7)\end{aligned}$$

这就是由复场导出的复方程式。

12.2 确定角点复坐标 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

除 $S = 0$ 点外, 再取 $S_i, F'(S_i), i = 1, 2, \dots, 2n - 3$, 由(12.7)形成 $2n - 3$ 阶的复线性方程组

$$AX = B \quad (12.8)$$

其中: A 是由(12.7)式的复系数构成的方阵, 而

$$\begin{cases} X = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{(n+1)}, \dots, x_{(2n-3)})^T, \\ B = (S_1^n, S_2^n, \dots, S_n^n, S_{(n+1)}^n, \dots, S_{(2n-3)}^n)^T. \end{cases} \quad (12.9)$$

由(12.8)解出 X , 取其前 n 个分量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 形成 n 阶复高阶方程

$$\begin{aligned}S^n - x_1 S^{n-1} + x_2 S^{n-2} - \\ \dots + (-1)^n x_n = 0, \quad (12.10)\end{aligned}$$

它的 n 个复根是 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ 而且是唯一的。解该复高阶方程, 即可求得 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, 从而确定了 n 棱水平柱体的角点位置。

12.3 确定物性参数 ρ 和 M_s

在求解 ρ 和 M_s 前需要对 n 个角点进行排序。当柱体为凸形时, 按顺时针排序的方法是: ①求出角点的平均复坐标 σ_0 (即质心)。它必然位于场源内; ②按任意顺序求出幅角

$$\begin{aligned}\psi_k = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(\sigma_k - \sigma_0)}{\text{Re}(\sigma_k - \sigma_0)} \right\} . \quad (12.11) \\ k = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

③按 ψ_k 值的大小重新对角点进行排序。然后, 由(12.4)式求出 M

$$M = F'(0) / \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\sigma}_{j+1} - \bar{\sigma}_j}{\sigma_j \sigma_{j+1}} . \quad (12.12)$$

求 ρ : 因 $M = 2fM_g = if\rho$, 故

$$\rho = iM/f . \quad (12.13)$$

求 I_s, M_s 模: 因 $M = 2M_m = -i\hat{M}\exp(iI_s)$, 故有

$$\begin{aligned}\hat{M} = |M|, \\ I_s = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}(iM)}{\text{Re}(iM)} \right\}, \quad (12.14)\end{aligned}$$

连载 3

更正: 应 2002 年 26 卷第 6 期“河南桐柏县银洞坡金矿地球物理特征”及 2003 年 27 卷第 1 期“老湾金矿床地球物理特征及找矿标志”文的作者要求, 补充参考文献: “邹光华, 欧阳宗圻, 李惠, 等. 中国主要类型金矿床找矿模型[M]. 北京: 地质出版社, 1996. 113 - 126.”。