用等厚薄层权重自适应迭代阻尼 最小二乘法反演瑞雷波频散曲线

宋先海¹,肖柏勋¹,黄荣荣¹,顾汉明²,张学强²

(1. 长江工程地球物理勘测研究院, 湖北 武汉 430010; 2. 中国地质大学应用地球物理系, 湖北 武汉 430074)

摘要:笔者在前人工作基础上提出的等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘法,能有效地解除对初始模型的依赖。理论模型与实际资料试算结果表明,用该算法对瑞雷波频散曲线进行反演,具有稳定性好、精度高、分辨能力强的特点,并能自动分层和反演地层参数。

关键词:频散曲线;自适应迭代阻尼因子;最小二乘法;权重矩阵;反演算法

中图分类号:P631.4 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 8918(2003)03 - 0212 - 05

横波速度与岩土力学参数密切相关^[1],因而是 工程地质勘察中的关键参数。而反演瑞雷波频散曲 线是获取横波速度的有效途径,同时亦可获取地层 厚度,进行地层划分^[2]。由于瞬态瑞雷波勘探具有 轻便、快捷、高效、分辨率高等优点,因而近年来倍受 关注。

对于瑞雷波频散曲线的反演,前人做过大量的 研究工作。如半波长解释法、拐点法、渐进线法、() $v_{\rm R}/\partial\lambda_{\rm R}$) · H 极值点法和近似计算法^[3],这些简单 反演法可靠性差、主观性强,只能粗糙地确定初始模 型。真正意义上的瑞雷波反演,是利用瑞雷波频散 曲线的正演计算公式来反演地层参数。Dorman 等 人^[4]提出了最小二乘反演法,它是利用频散曲线的 拐点分层初步确定初始模型和层数,同时反演横波 速度和地层厚度,但该方法严重地依赖于初始模型, 人为误差大,若初始模型选取不当将使反演结果很 差或得出错误的结果,甚至将使反演过程失败。Xia 等人^[5]提出了利用面波反演近地表横波速度的有 效途径,拓宽了面波的应用领域。Meier 等人^[6]提 出了人工神经网络反演法(ANN),该方法的缺点是 计算时间长、收敛速度慢、反演精度低。 Yamanaka 等人^[7,8]提出了遗传反演算法(GA),但该反演法也 存在占用内存多、译码运算量大、计算时间长、有效 基因丢失和早熟收敛等问题,尤其当反演层数较多 时,上述缺陷更为突出。

笔者在前人工作基础上,提出了等厚薄层权重

自适应^[9]迭代阻尼最小二乘法。该方法独特之处 是将初始模型取为近似均匀半空间,根据勘探深度 和精度要求将地下介质划分为等厚薄层,并使其在 反演过程中不变,同时,将各薄层横波速度取为等 值,进而根据反演后横波速度的变化进行自动分层。 反演算法基于迭代阻尼最小二乘法^[10]及奇异值分 解(SVD)^[11]的思想,引入权重矩阵提高分辨率,采 用自适应修改阻尼因子提高迭代效果,利用函数关 系约束、区间约束和固定约束来提高解的唯一性,同 时,等厚薄层的应用,提高了横波速度的反演精度。 在反演过程中,我们对正演算法^[12]进行了改进和优 化,有效地避免了高频数值溢出、有效数字损失等问 题,使上限频率提高到 8 000 Hz,并大大提高了运算 速度。

1 等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘反演法

1.1 反演方程的建立

层状介质中瑞雷波频散方程的非线性隐式形式 可以表示为

 $F(v_{Rj}, f_j, v_s, v_p, \rho, H) = 0$ (*j* = 1,2,…,*m*) (1) 式中: f_j 是第*j*个频率, v_{Rj} 是对应于第*j*个频率的瑞 雷波相速度, $v_s = (v_{s1}, v_{s2}, ..., v_{sn})^T$ 是横波速度向 量, $v_p = (v_{p1}, v_{p2}, ..., v_{pn})^T$ 是纵波速度向量, $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)^T$ 是密度向量, $H = (H_1, H_2, ..., H_n)^T$ 是厚 度向量, *m*为频率个数, *n* 为地层层数。

收稿日期:2002-05-30

基金项目:"九·五"国家重点科技攻关项目(N0.96-221-01-02-05)和长江水利委员会综合勘测局科技发展基金项目(N0.KY2000-4)联合资助

Xia 等人研究结果表明,频散方程对密度和纵 波速度的变化不敏感,故反演时假定密度和纵波速 度已知,同时,将地下介质划分为等厚薄层,并使其 在反演过程中不变,于是方程(1)中的未知数个数 由 4n - 1 个减少到 n 个,大大减少了待反演的地层 参数,通过上述假设,则式(1)可以表示为如下函数

$$v_{\rm Rj} = G(v_{\rm s}, f_j) \quad (2)$$

将(2)式中的 v_{Rj} 在初始值 v_{Rj0} 处泰勒级数展开并取 一阶近似进行线性化得

$$\Delta d = A \Delta x , \qquad (3)$$

式中,*A* 是由函数 *G* 关于元素向量 v_s 的一阶偏导数 所组成的 $m \times n$ 阶雅可比矩阵,可用扰动法计算矩 阵 *A* 中的各元素, $\Delta d = v_R - v_{RO}$ 是 *m* 维瑞雷波速度 残差向量, $\Delta x = v_s - v_{sO}$ 是 *n* 维横波速度残差向量。

根据 Marquardt 法,(3)式中的目标函数应兼有 方差项和模型长度项两项内容,同时,由于不同频率 处的相速度有不同的分辨能力和地层敏感性,因此, 在分辨率最大的频率段处的数据应比其它段被加 重,故定义目标函数 Φ 为

 $\Phi = \|A\Delta x - \Delta d\|_2 W \|A\Delta x - \Delta d\|_2 + \alpha \|\Delta x\|_2^2$ (4) 式中, $\|\cdot\|_2$ 是向量 l_2 的范数, W 是权重矩阵, α 为正常数, 其物理意义为阻尼因子。从而使反演问 题成为在约束条件 $\|\Delta x\| \leq \varepsilon$ 下, 寻求使目标函数 Φ 极小的模型参数修正量, ε 为一小正数。利用 Marquardt 法将该问题化简为

 $(A^{T}A + \alpha I)\Delta x = g$, (5) 式中:I 为单位矩阵, $g = A^{T}\Delta d$ 为 n 维向量。

1.2 反演方程的解

我们采用奇异值分解(SVD)技术解(5)式,设 *A*的奇异值分解式为

$$A = U \Lambda V^{\mathrm{T}}, \qquad (6)$$

式中:U 和 V 分别为对称矩阵 AA^T和 A^T A 之特征向 $量组成的 <math>m \times m$ 和 $n \times n$ 阶特征向量矩阵, A 是 A^T A或 AA^T 特征值之正根组成的 $m \times n$ 阶对角矩阵。将 (6) 式代入(5) 式得横波速度的修正量为

 $\Delta x = V(\Lambda^2 + \alpha I)^{-1} \Lambda U^{\mathrm{T}} \Delta d \qquad (7)$ 1.3 自适应迭代阻尼因子的应用

由(7)式可知,模型参数修正量与阻尼因子 α 有关,最佳的 α 必须满足尽可能小以获得解的最大 分辨率,同时应尽可能大以保证迭代收敛,使解稳 定,并且随迭代过程而变化。因此,笔者采用自适应 修改阻尼因子方法做反演。为了选取合适的阻尼因 子,可根据对称矩阵 $A^{T}A$ 来确定阻尼因子初值 $\alpha^{(0)}$

$$\alpha^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} / mn , \qquad (8)$$

式中, $\alpha^{(0)}$ 的取值范围为 1 ~ 10。

经过第 *i* 次迭代,如果新解不能使目标函数收 敛,则应加大阻尼因子,一般可增大 1.5 倍;反之,若 经过第 *i* 次迭代使目标函数收敛,说明校正步长还可 以加大,即阻尼因子还可以再缩小,一般可缩小 1/2。

1.4 最佳寻优步长的选取

在求得 Δ*x* 以后,并不直接用它来修正参数 v_s , 而是以它作为寻查方向,沿此方向做一维寻优求目 标函数 Φ 的极小。首先计算 $Φ(v_s^{(0)} + \Delta x)$,若它 < $Φ(v_s^{(0)})$,则将新的极小点近似解取为

$$\mathbf{v}_{\rm s}^{(1)} = \mathbf{v}_{\rm s}^{(0)} + \Delta \mathbf{x} , \qquad (9)$$

否则,利用抛物线法求极小点最优步长

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i}{\Phi(v_s^{(0)} + \Delta x) - \Phi(v_s^{(0)}) + 2\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta x_i} \circ (10)$$

若 $\Phi(\mathbf{v}_{s}^{(0)} + \beta \Delta \mathbf{x}) < \Phi(\mathbf{v}_{s}^{(0)}),$ 则将新的极小点近似 解取为

$$\mathbf{v}_{1}^{(1)} = \mathbf{v}_{1}^{(0)} + \beta \Delta \mathbf{x}_{2}$$
 (11)

如果此时目标函数仍然还不下降,则可用二分法分 别取 $t = \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2^2}, \dots, \frac{\beta}{2^7}, - 旦其中某 - t$ 值使 $\Phi(\mathbf{v}_s^{(0)})$ + $t\Delta \mathbf{x}) < \Phi(\mathbf{v}_s^{(0)})$ 式成立,则将新的极小点近似解 就取为

$$\mathbf{v}_{s}^{(1)} = \mathbf{v}_{s}^{(0)} + t\Delta \mathbf{x}_{o} \qquad (12)$$

最多二分 7 次, 若 7 次之后目标函数仍然不下降,则 认为 $v_{s}^{(0)}$ 已是 Φ 的极小点。求出新的极小点近似 解 $v_{s}^{(1)}$ 之后, 重复上述步骤依次迭代求出 $v_{s}^{(2)}$, $v_{s}^{(3)}$, …, $v_{s}^{(n)}$, 直到达到精度要求为止。

1.5 约束条件的应用

由于实际采集的频散数据的个数比较少,所以 为了提高反演解的唯一性,笔者采用函数关系约束、 区间约束和固定约束条件。函数关系约束是利用 v_p 与 v_s , v_s 与 v_R 和 ρ 与 v_p 之间的近似或统计关系,若 已知一个参数就可以近似估算另一个参数。区间约 束是利用给定的横波速度的变化范围,如果经过迭 代修正后的横波速度不在该范围内,则用逐次归位 法进行变换使其归位到约束范围,并保证迭代过程 的收敛。固定约束是根据勘探深度和精度要求,将 地下介质划分为等厚薄层,在每次迭代过程中不对 它修改,从而在深度约束下反演横波速度参数。

1.6 反演迭代过程的终止条件

反演迭代过程中可按下述标准终止迭代,一是 参数 v_s 修正量的相对值小于某一正数 ε_1 ,二是计算 的理论值和观测值的残差平方和 S 小于某一正数 ε_2 。

2 理论模型试算

用等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘法对 2~4 层(含一个软弱夹层)、5 层(含两个软弱夹 层)、6 层等多个理论地质模型进行反演试算,在无 先验模型信息的前提下都能得到较好的反演结果, 下面给出算例。

2.1 3 层介质模型

表1给出了3层地质模型参数,地质模型中 v_p 取为 $3v_s$ (下同),密度分别取为1.8、1.9 g/cm³。用 计算的理论频散作为观测值频散进行反演,反演时 迭代次数取为30,阻尼因子和最佳寻优步长初值均 取为1,计算雅可比矩阵时自变量的微小扰动取为 10^{-4} ,和分别取为 10^{-5} 、 10^{-4} ,求根步长取为 10^{-3} , 求根精度取为 10^{-6} (下同);在初始模型中每层厚度 均取为1 m的等厚薄层(这里的等厚薄层具有相对 性),并使其在反演中不变化,纵波速度和密度同原 模型不变(下同),本例中将初始模型设计为6 层 (保证最大波长大于勘探深度),每层横波速度均取 为130 m/s,反演结果见表1。

表1 3 层模型参数等厚薄层权重自适应迭代阻尼 最小二乘法及经典最小二乘法反演结果

模型参数	$v_{\rm sl}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	$v_{\mathcal{Q}} / (\mathbf{m} \boldsymbol{\cdot} \mathbf{s}^{-1})$	$v_{\rm s}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	h_1/m	h_1/m
理论值	100.00	150.00	225.00	1.00	2.00
薄层1	100.00	150.00	225.12		
薄层2		149.99	224.82		
薄层3			225.20		
最终结果	100.00	150.00	225.05	1.00	2.00
经典法初值1	95.00	140.00	225.00	1.00	3.00
经典法结果	100.00	150.07	225.17	1.00	2.00
经典法初值2	90.00	110.00	225.00	1.00	3.00
经典法结果	91.70	111.73	236.86	1.96	1.94

由表可见,由于等厚薄层和权重矩阵的应用,提 高了纵向分辨率,并能自动分层,由1 m 处的 100



m/s 突变到 2 m 处的 150 m/s, 然后由 3 m 处的 149.99 m/s 突变到 4 m 处的 225.12 m/s;同时可以 看出.6 层初始模型足以满足精度和分辨率要求。 由于减小了层厚对相速度的影响,从而大大提高了 横波反演精度。理论频散、初始频散及反演拟合频 散如图1所示。由图可见,理论频散与反演频散拟 合程度极高,拟合残差 S 仅为 0.000004:由于将初 始模型取为近似均匀半空间,故其初始频散曲线近 似为一条直线(如图1中的虚线),这也证明了改进 优化后的正演算法的正确性,同时可以看出,初始模 型的选取非常简单,仅为一条直线,不用根据拐点分 层,大大减小了对初始模型的依赖和人为误差,初始 模型中速度变化范围也给得相当宽(30~350 m/ s)。本模型反演迭代8次,耗时约10s(在PC586机 上)。不同初始模型经典最小二乘法反演结果见表 1(v。范围为85~230 m/s,厚度范围为1~4 m)。由 表可见,经典最小二乘法的反演结果与初始模型的 选取密切相关。另外,采用笔者提出的反演算法,能 由粗到细地评价地下介质的速度结构。

2.2 6 层介质模型

为进一步验证反演算法的稳定性和实用性,我们 又设计了6层地质模型。其模型参数、初始模型和反 演结果见表2。理论模型中设计了2个1m的薄层是 为了检验反演算法对多层介质的分辨能力,反演时横 波速度范围取为80~750 m/s。理论频散、初始频散 及反演拟合频散如图2,理论频散与反演频散几乎完 全重合,反演结束时拟合残差*S*为0.000001,迭代22 次,阻尼因子趋近于零。显然,根据图2中的频散曲 线由拐点法是很难分辨出层数的多少和2个薄层的 存在,而表2中的反演结果表明,本反演算法能准确 地分辨出层数和2个1m的薄层,且速度值也非常准 确,大大降低了相邻层的平均效应。拟合残差*S*之所 以比3层介质低是因迭代次数较多。



$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	$\frac{h/m}{1.00}$
<u>1 150.00 450.00 1.90 1.00 300.00 1.00 150.00</u>	1.00
2 220.00 660.00 2.00 2.00 300.00 1.00 220.00	2.00
3 300.00 900.00 2.10 1.00 300.00 1.00 220.00	1.00
4 450.00 1350.0 2.20 2.00 300.00 1.00 299.99	2.00
5 540.00 1620.0 2.30 2.00 300.00 1.00 449.98	2.00
$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	
7 300.00 1.00 539.73	
8 300.00 1.00 540.06	
9 300.00 1.00 620.00	

表2 6 层模型参数下初始模型及等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘法反演结果

表3 5 层模型参数下初始模型及等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘法反演结果

理 论 模 型				初 始 模 型		反 演 结 果		
层号	$v_{\rm s}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	$v_{\rm p}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	$\rho/(g \cdot cm^{-3})$	h∕m	$v_{\rm s}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	h∕m	$v_{\rm s}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	h∕m
1	220.00	660.00	2.00	2.00	250.00	1.00	220.03	2.00
2	150.00	450.00	1.90	1.00	250.00	1.00	219.98	1.00
3	300.00	900.00	2.20	2.00	250.00	1.00	150.00	2.00
4	250.00	750.0	2.20	1.00	250.00	1.00	300.23	1.00
5	450.00	1350.0	2.30	∞	250.00	1.00	298.42	
6					250.00	1.00	251.49	
7					250.00	1.00	449.14	

2.3 5 层介质模型

上面举的是 2 个递增型多层介质反演实例(且存在一个或多个薄层厚度)。表 3 给出了 5 层介质模型参数及初始模型和反演结果,其中含有 2 个 1 m的低速软弱薄层,用以进一步检验本反演算法的可行性和对低速软弱薄层的分辨能力,反演时横波速度范围取为 80 ~ 550 m/s。理论频散、初始频散及反演拟合频散如图 3,理论频散与反演频散几乎完全重合,反演结束时拟合残差 S 为 0.000 046,迭代 12次,阻尼因子趋近于零。从表 3 中的反演结果表明,本反演算法能准确地分辨出层数和 2 个 1 m 的低速软弱薄层,且速度值也非常准确。

3 实例分析

图4是在廊坊实测的瑞雷波频散资料^[1],频带



图 3 5 层模型的初始、理论和反演频散曲线

范围为 10~100 Hz, 11 个频点,资料中 20 Hz 和 40 Hz 的频点不可靠。用文中提出的算法对该测点进 行反演,初始模型取为9 层,为了说明薄层厚度的相 对性和分辨率的提高,在第4、第5 薄层处的厚度取 为0.1 m,其余各层厚度均取为0.7 m;各层速度均 取为130 m/s。速度范围取为100~160 m/s,反演迭 代用了8次。初始频散和反演频散见图4。对比经 典最小二乘法法和遗传算法的反演结果(表4),发 现3种方法的地质解释基本一致。不过经典最小二 乘法的反演结果受人为因素影响大,对初始模型的 要求严格。而同样要求下遗传算法的计算时间大约 是等厚薄层权重法的4倍,此外,还要事先假定层 数,并给定各参数的搜索范围。从曲线的拟合程度 来看,经典最小二乘法法的拟合残差为0.0448,遗 传算法的拟合残差为0.0422,而等厚薄层法的拟合



表 4 实测频散曲线等厚薄层权重自适应迭代阻尼最小二乘法及经典最小二乘法和遗传算法反演结果

等厚薄层权重法反演结果			经典最小二家	乘法反演结果	遗传算法反演结果		
层 号	$v_{\rm s}/({\rm m}\cdot{\rm s}^{-1})$	h/m	$v_{\rm s}/({\rm m\cdot s^{-1}})$	h∕ m	$v_{\rm s}/({\rm m\cdot s^{-1}})$	h/m	
1	130.08	2.30	132.04	2.24	130.09	2.15	
2	159.07		157.25		160.45		

残差最小,为0.0411。

4 结论与建议

大量理论模型和实际资料的试算结果表明,本反 演算法是一种计算上比较现实的最新瑞雷波频散曲 线反演方法,由于改进和优化了正演算法(同时计算 9个4层地质模型,在PC586上用时约0.5 s^[9])和减 少了待反演的层参数,所以反演速度较快,且能自动 分层;权重矩阵的应用提高了分辨率,自适应迭代阻 尼因子的应用改善了迭代效果和解的稳定性,等厚薄 层的应用提高了反演精度和纵向分辨率;同时使初始 模型的选取变得极为简单(为近似均匀半空间的一条 直线),大大放宽了横波速度搜索范围,从而避免了经 典最小二乘法对初始模型较严格的要求,又克服了人 工神经网络反演的收敛速度慢、精度低和遗传算法占 用内存多、译码运算量大、计算时间长(进行高达 105 次正反演计算^[8])的弱点。

本算法本质上仍然是基于拟合观测数据的,若 测点的观测误差太大,则可能使反演结果很差,因 此,客观上要求提高观测数据的精度。当精度和分 辨率不可兼得时,可以根据侧重程度取最佳折中解。

本研究得到肖柏勋博士、顾汉明教授、张学强教 授、夏江海博士的指导和支持,在此表示衷心地感谢!

参考文献:

- [1] 杨成林. 瑞雷波勘探[M]. 北京: 地质出版社, 1993.
- [2] 胡家富,段永康,胡毅力,等.利用 Rayleigh 波反演浅土层的剪 切波速度结构[J]. 地球物理学报, 1999,42(3):393-400.
- [3] 刘云祯,王振东. 瞬态面波法的数据采集处理系统及应用实例[J]. 物探与化探,1996,20(1):28-33.
- [4] Dorman J, Ewing M. Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and Crust-Mantle structure in the New York – pennsylnvania area[J]. J Geophys Res, 1962, 67:5227 – 5241.
- [5] Xia J, Miller R D, Park C B. Estimation of near surface shear wave velocity by inversion of Rayleigh wave [J]. Geophysics, 1999, 64(3): 691 – 700.
- [6] Meier R W, Rix G J. Initial study of surface wave inversion using artificial neural networks [J]. Geotechnical Testing Journal, 1993, 16(4): 425-431.
- [7] Yamanaka H, Ishida H. Application of genetic algorithms to an inversion of surface wave dispersion data[J]. Bull Seism Soc Am, 1996, 86(2): 436-444.
- [8] 石耀霖,金文. 面波频散反演地球内部构造的遗传算法[J].地球物理学报,1995,38(3):189-198.
- [9] 宋先海. 瑞雷波频散曲线的正反演研究[D]. 武汉:中国地质 大学,2001.
- [10] Marquardt D W. An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters[J]. J Soc Indus Appl Math, 1963, (2).
- [11] Golub G H, Reinsch C. Singular value decomposition and least square solution[J]. Numer. Math, 1970,14: 403-420.
- [12] Schwab F, Knopoff L. Surface-wave dispersion computations [J].Bull Seism Soc Am, 1970, 60:321 344.

THE INVERSION OF DISPERSION CURVES USING SELF – ADAPTIVELY ITERATIVE DAMPING LEAST SQUARE METHOD BY COMBINING EQUAL THINNER LAYERS WITH WEIGHTING MATRIX

SONG Xian-hai¹, XIAO Bo-xun¹, HUANG Rong-rong², GU Han-ming², ZHANG Xue-qiang² (1. Institute of Changjiang Engineering Geophysical Prospecting, Wuhan 430010, China; 2. Department of Applied Geophysics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract: The self-adaptively iterative damping least square method is proposed in this paper by combining equal thinner layers and weighting matrix. The new efficient algorithm can overcome such serious shortcomings existent in the classic least square method as the strict dependence on initial model, the remarkable man-made error, low accuracy, and the bad convergence velocity, which have a great adverse effect on the inversion of dispersion curves of Rayleigh wave. The inversion results of the new theoretical model and field dispersion data indicate that this inversion is characterized by good stability, high accuracy and strong resolution, and can automatically inverse shear velocity and thickness.

Key words: dispersion curve; self-adaptively iterative damping factor; least square method; weighting matrix; inversion algorithm

作者简介: 宋先海(1973 –),男,2001 年毕业于中国地质大学(武汉)应用地球物理系获硕士学位,现为长江工程地球物理勘测研究院(武汉)软件开发部主任、高级工程师、长江水利委员会综合勘测局科技发展基金项目"瑞雷波勘探的理论与应用技术研究"项目负责人,现主要从事瑞雷波正反演研究及软件开发工作,发表论文数篇。