

跨孔层析成像 LSQR 算法研究

杨薇, 刘四新, 冯彦谦

(吉林大学 地球探测科学与技术学院, 吉林 长春 130026)

摘要: 目前广泛应用于工程、环境、水文等领域的探地雷达跨孔层析成像技术具有分辨率高, 探测范围广, 得到的图像结果直观, 便于工作者分析地下地层结构等特点。层析成像的关键在于解系数矩阵为大型稀疏矩阵的方程组, 笔者采用 LSQR 算法。此方法具有速度快, 对不适定问题数值稳定以及从迭代过程很容易求得数值分析的数值的优点, 用其解大型稀疏矩阵方程组得到的结果清晰可靠, 在各种层析成像中 LSQR 算法得到了广泛的应用。

关键词: 探地雷达; 层析成像; LSQR 算法

中图分类号: P631.8

文献标识码: A

文章编号: 1000-8918(2008)02-0199-04

跨孔测量方式是钻孔雷达测量方式之一, 其主要作用是用来做层析成像 (computerized tomography, 简称“CT”), 它是 20 世纪 80 年代末出现的一种新型地球物理探测技术, 是医学 CT 技术在地学中的推广, 国内简称 CT 探测^[1]。CT 探测技术具有分辨率高, 探测范围广, 得到的图像结果直观, 便于分析地下地层结构等特点, 广泛应用于工程勘察与检测、金属矿藏、油田、工程和水文地质、环境等领域。近年来我国在跨孔层析成像仪器、方法、算法和软件方面取得重要进展。该技术归根结底是解线性方程组的问题, 目前进行层析成像的迭代算法有: 反投影技术 (BPT)、代数重建技术 (ART)、联合迭代重建技术 (SIRT)、共轭梯度法 (CG)、最小平方正交分解法 (LSQR) 等。BPT、ART 和 SIRT 是 20 世纪 70 年代初的方法。BPT 方法计算简单、快速, 但分辨率低, ART 法速度快但有时不收敛, SIRT 方法迭代收敛性好, 收敛速度快, 但占用计算机内存较大, 计算成本高^[2]。LSQR 是目前常用的方法, 在迭代过程中, 它只涉及到非零元素, 占有用存贮空间少, 运算速度快, 特别适于求解系数为大型稀疏矩阵的方程组, 与其他迭代方法相比, 在解奇异或病态问题时, LSQR 显示出更快的收敛性及更好的可接受的结果。因此, LSQR 被广泛地运用于地球物理层析成像反演^[3]。

1 原理

在做跨孔雷达层析成像时, 可利用射线走时信息, 得到的是电磁波在研究区的速度特征, 称为速度

层析; 也可利用振幅信息, 得到的是电磁波在研究区的衰减层析。

1.1 速度层析原理

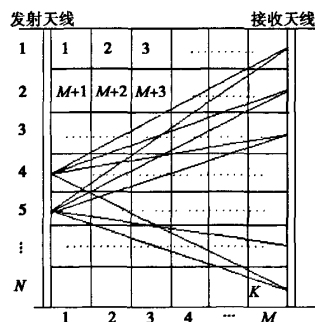


图 1 层析成像原理示意

设图 1 为某一地段的 2 个井孔, 假定在左端井孔放置发射天线, 右端放置接收天线, 且接收的是电磁波的穿透直达波, 假定在速度差异较小介质 (小于 10% ~ 15%) 中电磁波以直线传播, 则传播时间可用速度的倒数 (即慢度) 的线性积分来表示, 对每条射线都有

$$T_i = \int_{L_i} \frac{1}{v(x)} ds = \int_{L_i} c(x) ds。$$

对断面作均等剖分, 横向依 Δx 长度分割为 M 个网格单元, 纵向依 Δy 长度分割成 N 个网格单元。设: 激发点的序号为 $i = 1, \dots, N$; 接收点的序号为 $j = 1, \dots, N$; 每个激发点与接收点均在网格边线的中点上; 网格单元序号为 $k = 1, \dots, K (K = M \times N)$, 设每一格网格中的波的速度 (或慢度) 为一平均值 c_k , 则可得到

$$t_i^j = \sum_{k=1}^{M \times N} L_{ij}^k c_k,$$

式中, t_i^j 为第 i 点激发时, 在第 j 点接收到的波的走时; L_{ij} 为第 i 点激发, 第 j 点接收时射线通过网格单元 k 的路径长度; c_k 为第 k 个网格单元的慢度。

当 i 为某一定值时, j 可取遍 $1 \sim N$, 即得 N 个下式所列方程, 构成 1 个方程组

$$\begin{cases} t_i^1 = \sum_{k=1}^{M \times N} L_{i1}^k c_k \\ t_i^2 = \sum_{k=1}^{M \times N} L_{i2}^k c_k \\ \vdots \\ t_i^j = \sum_{k=1}^{M \times N} L_{ij}^k c_k \\ \vdots \\ t_i^N = \sum_{k=1}^{M \times N} L_{iN}^k c_k \end{cases},$$

也可写成矩阵形式 $T_i = L_i C$, 其中, T_i 表示第 i 点激发时, 得到的 j 个走时形成的矩阵, 是观测值; L_i 表示第 i 点激发时所有射线的所有段元形成的矩阵; C 表示所有网格中波传播速度形成的矩阵, 是待求量。

当 i 从 1 取到 N 时, 则可得到一个 $M \times N$ 个方程的方程组, 以矩阵表示为 $T = LC$ 。在速度层析中, 要对该式求解, 并将其转化为 1 个 $M \times N$ 的矩阵, 并以灰度或彩色图像显示出来。

1.2 衰减层析原理

在做衰减层析成像时, 幅度不能从线性积分直接获得, 但通过取对数, 问题就可变成线性层析成像反演。探地雷达发射的一般是球面波, 因此电场幅度随距离的衰减可表示为

$$E = c_1 \alpha(\theta) \frac{\exp(-\alpha r)}{r},$$

式中, c_1 表示天线辐射功率的 1 个常数, $\alpha(\theta)$ 为天线的指向性, α 为介质衰减常数, r 为电磁波的传播距离。实测的射线振幅 E_r 应取决于发射天线和接收天线的指向性增益, 如接收天线和发射天线辐射模式相同, 则 E_r 满足

$$E_r = \frac{E_0 \exp(-\alpha r)}{r} \alpha(\theta_i) \alpha(\theta_r),$$

式中, αr 为沿射线方向电磁波振幅的衰减总量; E_0 是与系统有关的归一化常数^[4]; $\alpha(\theta_i)$ 、 $\alpha(\theta_r)$ 分别为发射天线和接收天线的方向性增益; r 为电磁波的传播距离。假设传播为远场传播并且用的是偶极天线, 则有

$$E_r = \frac{E_0 \exp(-\alpha r)}{r} \sin(\theta_i) \sin(\theta_r),$$

对上式取对数, 整理得

$$\alpha r = \int \alpha(x) ds = \ln \frac{E_0 \sin(\theta_i) \sin(\theta_r)}{r E_r},$$

式中, $\sin(\theta_i)$ 是偶极发射天线的辐射模式; $\sin(\theta_r)$ 是接收天线灵敏度函数; θ_i 和 θ_r 分别是接收天线与发射天线和射线路径之间的夹角。

与速度层析相同将断面分成若干网格单元, 线性积分通过求和来计算, 仍假定射线为直线, 则有

$$d_i = \sum_{j=1}^M G_{ij} b_j,$$

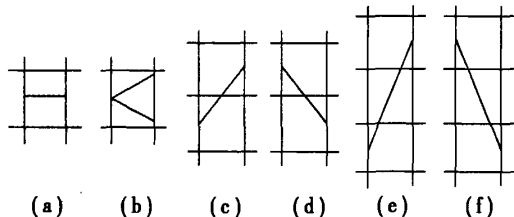
式中, G_{ij} 为第 i 条射线在第 j 个单元中的长度; b_j 为第 j 个单元的衰减系数。解出此方程组, 即可得到各单元内的衰减系数, 从而了解地下介质的情况。

由于待解方程组中系数矩阵都是大型的稀疏矩阵, 方程通常不是适定的, 无法求得精确解, 所以求解时常使用迭代的方法, 笔者使用 LSQR 算法。

2 算法

2.1 系数矩阵的求取

从原理中可看出, 求取射线穿过网格所形成的稀疏矩阵是解方程组前的一个重要步骤。系数矩阵的求取关键在于判断 1 条射线与 2 条相邻纵向线的交点的位置关系, 以此来判定网格内是否有射线经过, 以及射线经过网格时, 网格中段元的长度。由已知的发射点和接受点的坐标, 可得出每条射线的斜率及方程, 即可求出每条射线与纵向线的交点坐标。图 2 即为两相邻交点的位置关系。



a—两交点相等; b—两交点在一个网格内; c、d—两交点分别在相邻的网格内; e、f—两交点分别在不相邻的网格内

图 2 1 条射线与 2 条相邻纵向线交点的位置关系

通过比较以及交点的纵坐标值可以确定射线通过的网格号, 以及网格内射线的长度。每条射线都用此方法来确定, 即可求出每条射线穿过各网格的长度, 从而求出系数矩阵。

2.2 LSQR 算法

在求出系数矩阵后, 即可用 LSQR 算法解线性方程组。LSQR 方法是 Paige 和 Sanders 在 1982 年提出的, 它是利用 Lanczos 迭代法^[5]求解最小二乘

问题的一种方法。LSQR 方法具有计算量小的优点,并且能很容易地利用矩阵的稀疏性简化计算,因而适合求解大型稀疏问题。

方程 $Ax = b$ 的最小二乘问题 $\min \|Ax = b\|_2$ 可以通过双对角化来求解。假定 $U_k = [u_1, \dots, u_k]$ 和 $V_k = [v_1, \dots, v_k]$ 是正交阵,且 B_k 为如下的 $(k+1) \times k$ 的下角阵

$$B_k = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \cdots \\ \beta_2 \alpha_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \alpha_k \\ \cdots & \cdots & \beta_{k+1} \end{bmatrix}$$

用下列迭代方法可实现矩阵 A 的双对角分解

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 u_1 &= b, \alpha_1 v_1 = A^T u_1 \\ \beta_{i+1} &= A v_i - \alpha_i u_i \\ \alpha_{i+1} v_{i+1} &= A^T \beta_{i+1} v_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots$$

其中, $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ 。使 $\|u_i\| \equiv \|v_i\| \equiv 1$, 上式又可写成如下形式

$$\left\{ \begin{aligned} U_{k+1}(\beta_1 e_1) &= b \\ A V_k &= U_{k+1} B_k \\ A^T U_{k+1} &= V_k B_k^T + \alpha_{k+1} v_{k+1} e_{k+1}^T \end{aligned} \right.$$

其中, e_{k+1}^T 表示 n 阶单位矩阵的第 $k+1$ 行, 再设

$x_k = V_k y_k, r_k = b - A x_k, t_{k+1} = \beta_1 e_1 - B_k y_k$, 可以确定

$$\begin{aligned} r_k &= b - A x_k = U_{k+1}(\beta_1 e_1) - A V_k y_k \\ &= U_{k+1}(\beta_1 e_1) - U_{k+1} B_k y_k = U_{k+1} t_{k+1}, \end{aligned}$$

在满足给定精度时停止迭代。由于我们希望 $\|r_k\|$ 尽量小, 且 U_{k+1} 理论上是正交阵, 取 y_k 使 $\|t_{k+1}\|$ 最小。解最小二乘问题 $\min \|\beta_1 e_1 - B_k y_k\|$, 这就构成 LSQR 算法的基础^[6]。LSQR 主要步骤总结如下。

(1) 初始化。 $\beta_1 u_1 = b, \alpha_1 v_1 = A^T u_1$,

$$w_1 = v_1, x_0 = 0, \bar{\varphi}_1 = \beta_1, \bar{\rho}_1 = \alpha_1$$

其中, b_1, u_1 为 m 维向量, w_1, x_0 为 n 维向量, $\bar{\varphi}_1, \bar{\rho}_1, \alpha_1, \beta_1$ 为实数。

(2) 对 $i = 1, 2, \dots$ 做以下各步。

(3) 双对角化矩阵。① $\beta_{i+1} u_{i+1} = A u_i - \alpha_i u_i$,

② $\alpha_{i+1} v_{i+1} = A^T u_{i+1} - \beta_{i+1} v_i$ 。

(4) 修改参数。① $\rho_i = (\bar{\rho}_i^2 + \beta_{i+1}^2)^{1/2}$, ② $c_i = \bar{\rho}_1 / \rho_i$, ③ $s_i = \beta_{i+1} / \rho_i$, ④ $\theta_{i+1} = s_i \alpha_{i+1}$, ⑤ $\bar{\rho}_1 = -c_i \alpha_{i+1}$, ⑥ $\varphi_1 = c_i \bar{\varphi}_i$, ⑦ $\bar{\varphi}_{i+1} = s_i \bar{\varphi}_{i+1}$ 。

(5) 迭代求解。① $x_i = x_{i-1} + (\varphi_i / \rho_i)$, ② $w_{i+1} = v_{i+1} - (\theta_{i+1} / \rho_i)$ 。

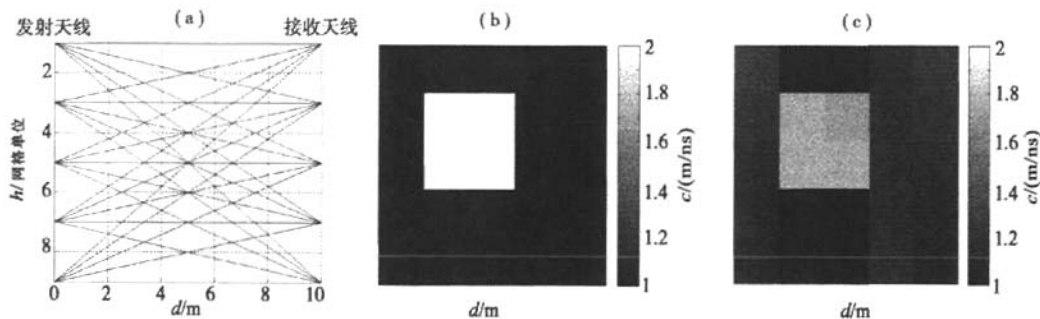
(6) 收敛判别。最简单的测试: 当迭代次数增加时, 所求得解没有明显变化即可停止迭代。

用 LSQR 法得出方程组解后, 可将结果以灰度图显示出, 即可以直观地分辨研究断面的异常体。

3 计算实例

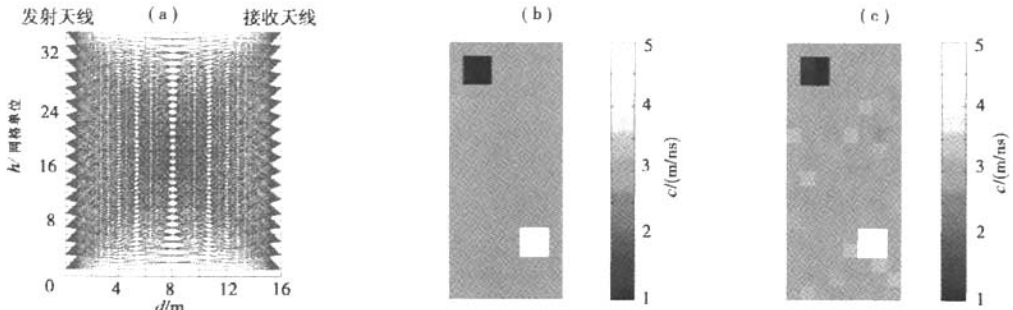
以下是以一个 5×5 的, 网格间距为 2 个单位的网格计算的实例。即假设将断面横向以 2 m 为间距分割成五等分, 纵向以 2 m 为间距分割成五等分, 发射点与接收点分别在左右边线在网格中间(图 3a)。从图 3b 看出, 给出的模型在研究断面内有一块白色电磁波慢度较高的异常区, 用由此模型合成的时间矩阵反演出来的成果(图 3c)中在同样地方也有一个电磁波慢度异常区, 且图像与给出的模型图很接近。说明跨孔层析成像技术能够反映地下地质体的一些物性特征, 可用于地下结构的分析。

用以上方法, 将网格加密, 如 1 个 18×8 的网格, 其网格、模型以及层析成像的结果见图 4。图中黑色为高速异常区, 白色为低速异常区, 可看出当网格加密时, 层析成像的效果更好些。



a—网格示意; b—模型; c—层析成像结果

图3 5×5 网格的计算结果



a—网格示意;b—模型;c—层析成像结果

图4 18×8 网格的计算结果

4 结论

通过对上述模型的计算,可以得到以下结论。

(1)在进行跨孔雷达层析成像时,获得的数据量较少,而未知象素较多,得到的系数矩阵通常是大型的稀疏矩阵,因而方程组都是欠定的,甚至是严重欠定的。在这种不利的条件下,运用 LSQR 算法进行层析处理仍能获得较为满意的图像。

(2)在进行跨孔层析成像时正演网格的划分和反演网格划分最好是一致的,且网格的划分不可以过于稀疏或密集,否则都将影响层析成像的效果。

(3)用跨孔雷达层析成像的方法进行地下地质地层结构勘测是方便可行的,因为利用这种方法可以直观地反应地下介质的某些参数,如速度、慢度、以及介质的吸收系数等,从而可以判断地下异常体的位置。因此,此种方法是工程、环境、水文等领域中的一种十分有效的勘测方法。

参考文献:

- [1] 宋文荣,吴仪芳,刘建达,等. 电磁波层析成像技术(CT)在地基勘探中的应用[J]. 地震学刊,1994,2.
- [2] 刘盛东,李承华. 地震走时层析成像算法与比较[J]. 中国矿业

- 大学学报,2000,3.
- [3] 张赛民. 跨孔地震层析成像研究[D]. 中南大学,2003.
- [4] 曾昭发,刘四新,王者江,等. 探地雷达原理和应用[M]. 北京:科学出版社,2006.
- [5] 徐树芳. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京:北京大学出版社,1995.
- [6] 杨文采. 地球物理反演的理论与方法[M]. 北京:地质出版社,1997.
- [7] Giroux B, Chouteau M. The effect of clay seams in Borehole GPR Attenuation Tomography [C]//10th International Conference on Ground Penetrating Radar. Delft, The Netherlands, 2004.
- [8] Gloaguen E, Marcotte D, Chouteau M. A new constrained velocity tomography algorithm using geostatistical simulation [C]//10th International Conference on Ground Penetrating Radar. Delft, The Netherlands, 2004.
- [9] Lee Ki Ha, Xie Ganquan. A new approach to imaging with low-frequency electromagnetic fields [J]. Geophysics, 58(6):7870.
- [10] 宋雷,黄家会,崔广心,等. 电磁波速度层析成像技术用于探测地下深部岩层特性研究[J]. 工程勘察,2000,(2).
- [11] 崔春林. 钻孔电磁波层析成像 CT 技术及其应用[J]. 山西水利科技,2005,1.
- [12] 赵卫平,潘和平,李清松,等. 井中雷达应用进展[J]. 工程地球物理学报,2005,2(4).
- [13] 裴顺平. 中国大陆上地幔顶部体波速度层析成像[D]. 中国地震局地球物理研究所,2002.
- [14] 张沙清. 工程 CT(层析成像)技术研究及其软件开发[D]. 桂林:桂林工学院,2002.

A STUDY OF THE LSQR ALGORITHM FOR CROSS-HOLE TOMOGRAPHY

YANG Wei, LIU Si-xin, FENG Yan-qian

(College of Geoprospection Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China)

Abstract: The key of the tomography lies in solving the equation group whose coefficient matrix is a large sparse one, and the LSQR algorithm is used here. This algorithm has many advantages that other iterative methods don't have. The calculation instance has proved that the results of the LSQR method are clear and reliable, and hence it has been widely used.

Key words: GPR; cross-hole tomography; LSQR algorithm

作者简介: 杨薇(1984-),女,黑龙江人,吉林大学地球探测科学与技术学院在读硕士研究生,主要研究探地雷达的应用问题,公开发表学术论文数篇。