

Chebyshev 逼近滤波器在位场分离中的应用

蒋甫玉¹, 孟令顺¹, 张凤旭¹, 高丽坤²

(1. 吉林大学 地球探测科学与技术学院, 吉林 长春 130026; 2. 南京大学 地球科学系, 江苏 南京 210093)

摘要:在对经典 FIR 数字滤波器的设计方法进行研究的基础上, 提出了一种可以用于位场分离的基于 Chebyshev 最佳一致逼近原理的 FIR 滤波器的设计方法。在理论模型实验中, 采用基于 Hanning 窗的低通滤波器计算出的区域异常最大误差为 $6.266 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, 均方差为 $2.115 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, 最大百分比误差为 22.2%, 而且计算点在 $\pm 9 \text{ km}$ 以外的误差均大于 10.1%。而利用最佳一致逼近原理分离出的区域场和局部场与理论异常值拟合得较好, 曲线基本重合。分离出的区域异常最大误差为 $3.101 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, 均方差为 $0.989 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, 最大百分比误差仅在边部的几个数据上, 为 7.76%, 其余各点的误差均小于 4.1%。实例检验中将该方法用于孙吴—嘉荫剖面布格重力异常场的分离, 分离出的区域场中局部场残留少, 分离彻底, 效果较为理想。

关键词: Chebyshev 逼近; FIR 数字滤波器; 截止频率; 径向平均对数功率谱; 位场

中图分类号: P631.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-8918(2008)03-0311-05

从位场谱分析来看, 当实测场是由区域场与局部场叠加而成时, 其径向平均对数功率谱可以用不同斜率的直线拟合^[1-4], 它们分别反映了区域场与局部场的主频段。因而采用提取不同波数成分场就可以实现场的分离^[5]。

基于 Hanning 时窗函数的 FIR 低通滤波是位场分离的一种常用方法。从滤波理论可知, 该方法设计出的滤波器频率特性是在最小平方的意义上对所给理想频率特性的逼近。为减小间断点处出现的较大过冲(Gibbs 现象), 采用加 Hanning 窗口的设计法, 但加窗后已不满足优化准则, 特性不是最佳的, 不再是最小平方逼近^[6]。

McClellan J. H., Parks T. W 和 Rabiner L. R 等人^[7-9]应用 Chebyshev 逼近理论, 提出了一种 FIR 数字滤波器的计算机辅助设计方法。这种方法由于是在一致意义上对理想频率特性做最佳逼近, 因而获得了较好的通带和阻带性能, 并能准确地指定通带和阻带的边缘, 是一种有效的设计方法。笔者将该方法用于研究位场信号分离, 实践证明, 此法可以更精确地实现重、磁异常的分离。

1 Chebyshev 最佳一致逼近原理

Chebyshev 最佳一致逼近的基本思想是, 对于给定区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 在所有 n 次多项

式的集合 P_n 中, 寻找一多项式 $\hat{p}(x)$, 使它在 $[a, b]$ 上对 $f(x)$ 的偏差和其他一切属于 P_n 的多项式 $p(x)$ 对 $f(x)$ 的偏差相比是最小的, 即

$$\max_{a \leq x \leq b} |\hat{p}(x) - f(x)| = \min_{a \leq x \leq b} \{ \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)| \} \quad (1)$$

Chebyshev 逼近理论指出应用“交错点组定理”可以构造出这种最佳一致逼近多项式。令

$$E_n = \max_{a \leq x \leq b} |p(x) - f(x)|, \\ E(x) = p(x) - f(x),$$

$p(x)$ 是 $f(x)$ 最佳一致逼近多项式的充要条件, 即 $E(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少存在 $n+2$ 个交错点 $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq b$, 使得 $E(x_i) = \pm E_n, i=1, 2, \dots, n+2$, 且 $E(x_i) = -E(x_{i+1}), i=1, 2, \dots, n+2$ 。这 $n+2$ 个点即是“交错点组”, 显然 x_1, x_2, \dots, x_{n+2} 是 $E(x)$ 的极值点。

n 阶 Chebyshev 多项式

$$C_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

在区间 $[-1, 1]$ 上存在 $n+1$ 个点 $x_k = \cos(\pi k/n), k=0, 1, \dots, n$, 轮流使得 $C_n(x)$ 取得最大值和最小值。 $C_n(x)$ 是 x 的多项式, 且最高项 x^n 的系数是 2^{n-1} , 在所有 n 阶多项式中, 多项式 $C_n(x)/2^{n-1}$ 和 0 的偏差为最小。这样, 如果在寻找 $p(x)$ 时, 能使误差函数为某一个 $C_n(x)$, 那么这样的 $p(x)$ 将是对 $f(x)$ 的最

佳一致逼近。

2 滤波器的设计

2.1 利用最佳一致逼近原理设计滤波器

设所希望的理想频率响应为

$$H_d(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c; \\ 0, & \omega_c \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (3)$$

为保证设计出的 $H(e^{i\omega})$ 具有线性相位,在此假设 N 为奇数, $h(n)$ 为偶对称,则

$$H(e^{i\omega}) = e^{-i(N-1)\omega/2} H_g(e^{i\omega}). \quad (4)$$

式中,

$$H_g(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega), \quad M = \frac{N-1}{2}. \quad (5)$$

式(5)中 $a(n)$ 和 $h(n)$ 满足

$$a(n) = \begin{cases} h[(N-1)/2], & n = 0; \\ 2h(\frac{N-1}{2} - n), & n = 1, \dots, \frac{N-1}{2} \end{cases} \quad (6)$$

关系。对式(5)做适当变形,得

$$H_g(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \left[\sum_{k=0}^n \beta_{kn} (\cos\omega)^k \right] = \sum_{n=0}^M b(n) (\cos\omega)^n, \quad M = (N-1)/2. \quad (7)$$

令 $x = \cos\omega$, 则由式(7)得

$$H_g(x) = \sum_{n=0}^M b(n) x^n, \quad (8)$$

显然 $x \in [-1, 1]$, 可以用 Chebyshev 节点插值来设计逼近函数 $H_g(e^{i\omega})$, 取 $M+1$ 个节点

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2M+2}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (9)$$

即 $\omega_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2M+2}$, 由式(7)得

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_0 & \dots & (\cos\omega_0)^M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\omega_M & \dots & (\cos\omega_M)^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{i\omega_0}) \\ \vdots \\ H_d(e^{i\omega_M}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

通过这个矩阵方程可求出参数 $\{b_n\}$, 从而由式(7)可得到 $H_g(e^{i\omega})$, 代入式(4), 这样最佳滤波器 $H(e^{i\omega})$ 便可构成。当滤波器长度 N 较小时, 能准确地解出 $\{b_n\}$, 但随着 N 的增大, 解出的 $\{b_n\}$ 的误差将增大。同时, 由于矩阵求逆耗时很长, 并且效率低, 所以在实际应用中可以利用 Lagrange 插值公式, 则 $H_g(e^{i\omega})$ 可以表示为

$$H_g(e^{i\omega}) = \sum_{i=0}^M \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^M \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right] y_i, \quad (11)$$

其中, $x = \cos\omega$, $x_i = \cos\omega_i$, $x_j = \cos\omega_j$, $y_i = H_d(e^{i\omega_i})$ 。将式(11)的计算结果代入式(4)便可构成最佳滤波器 $H(e^{i\omega})$ 。

2.2 滤波器的单位冲击响应

得到滤波器的频率响应函数后, 需要求出其单位冲击响应 $h(n)$ 。当 N 为奇数时, 可对式(10)在一组等间隔频率点上取样, 取 $\omega_i = \frac{2\pi}{N}(k + \frac{1}{2})$, $k = 0, 1, \dots, m$, 对式(5)进行取样, 得到

$$H(k + \frac{1}{2}) = H_g \left[\frac{2\pi}{N} (k + \frac{1}{2}) \right] e^{-i2\pi(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2N})}. \quad (12)$$

式中, $H(k + \frac{1}{2}) = H \left[\frac{2\pi}{N} (k + \frac{1}{2}) \right]$, 易知

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k + \frac{1}{2}) e^{i2\pi(k+\frac{1}{2})\frac{n}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

定义

$$G(k + \frac{1}{2}) = (-1)^k H_g \left[\frac{2\pi}{N} (k + \frac{1}{2}) \right], \quad (14)$$

并带入式(12), 得

$$H(k + \frac{1}{2}) = G(k + \frac{1}{2}) e^{imk} e^{-i2\pi(k+\frac{1}{2})(\frac{N-1}{2N})}. \quad (15)$$

这样关于 $H(k + 1/2)$ 的对称条件就转换成相应的关于 $G(k + 1/2)$ 的对称条件, 即 $G(k + 1/2) = G(N - k - 1/2)$, 将式(15)带入式(13)可得

$$h(n) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^M G(k + \frac{1}{2}) \cdot \sin \left[2\pi(k + \frac{1}{2}) \frac{(n + 1/2)}{N} \right]. \quad (16)$$

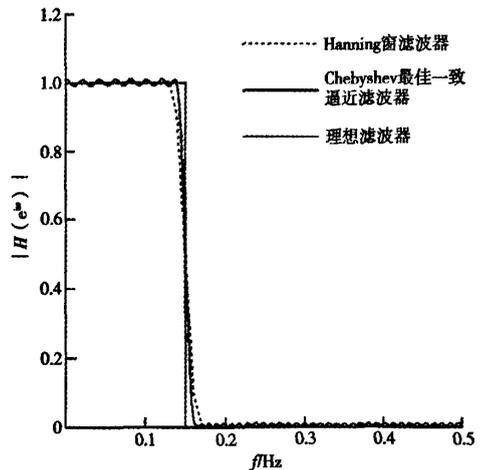


图1 滤波器频率响应

结合式(11)、(14)和(16)就可以求出 FIR 数字滤波器的单位冲击响应 $h(n)$ 。

依据上述方法来设计一个长度 N 为 101, 截止频率 $\omega_c = 0.3\pi$ 的低通线性相位 FIR 滤波器。图 1 中同时给出了理想滤波器和基于 Hanning 窗函数设计出的滤波器频率响应, 相比 Hanning 窗, 基于最佳一致逼近原理设计出的滤波器过渡带较窄。可以看出, 在通带和阻带内用最佳一致逼近原理设计出的滤波器均具有良好的性能。

3 模型实验及分析

为研究方便, 笔者以密度均匀的球体为研究对象, 用 Hanning 窗法和最佳一致逼近法对球体模型的场进行分离, 研究这 2 种方法在异常划分中的精度。

设 2 个球体的中心点在地表的投影点为坐标原点, 水平剖面与 x 轴重合; 上球体模型的中心埋深 $D = 1$ km, 半径 $R = 0.5$ km, 剩余密度 $\rho = 0.5$ g/cm³; 下球体模型 $D = 12$ km, $R = 5$ km, $\rho = 0.5$ g/cm³。

图 2 为理论模型的径向平均对数功率谱, 较为清晰地给出了理论模型中上、下球体的 2 段频段, 低频部分主要为下球体(区域异常)的反映, 高频部分则为上球体(局部异常)的反映。

分析该功率谱曲线, 选择合适的滤波波段, 得到通

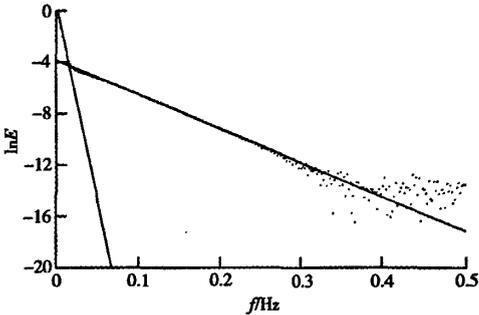


图 2 理论模型径向平均对数功率谱

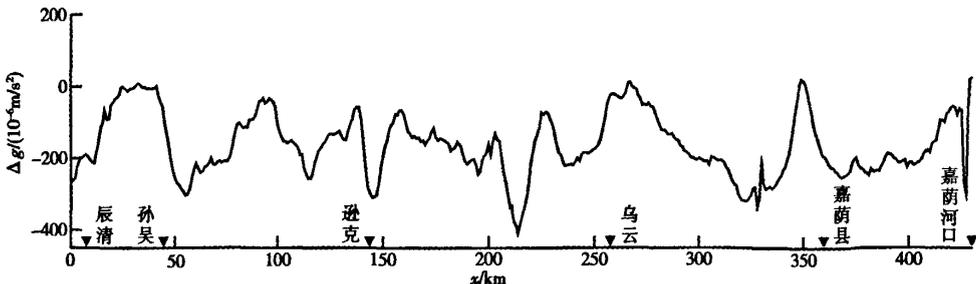
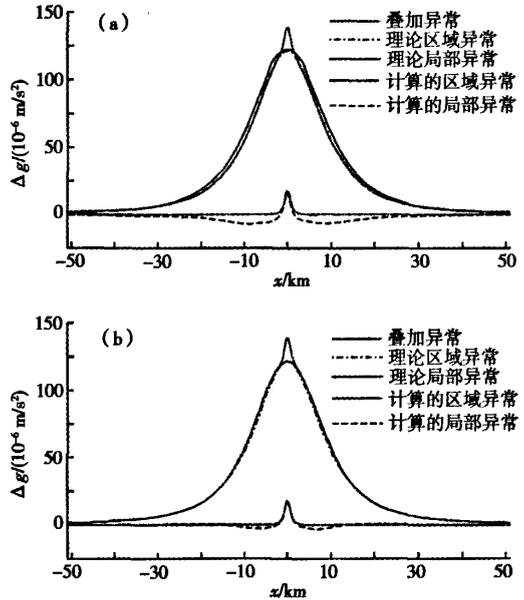


图 4 孙吴—嘉荫剖面布格重力异常

带截止频率 $\omega_c = 0.025\pi$, 根据前文所述方法构造出最佳一致逼近滤波器便得到异常场划分剖面图(图 3b)。通过对比分析图 3a 和图 3b 可以看出: 基于 Hanning 窗计算出的区域异常与理论异常偏离较大, 局部异常与理论异常偏离更大。计算出的区域异常最大误差为 6.266×10^{-6} m/s², 均方差为 2.115×10^{-6} m/s², 最大百分比误差为 22.2%, 而且计算点在 ± 9 km 以外的误差均大于 10.1%。而利用最佳一致逼近原理分离出的区域场和局部场与理论异常值拟合的较好, 曲线基本重合。分离出的区域异常最大误差为 3.101×10^{-6} m/s², 均方差为 0.989×10^{-6} m/s², 最大百分比误差仅在边部的几个数据上为 7.76%, 其余各点的误差均小于 4.1%。



a—Hanning 窗的计算结果; b—Chebyshev 一致逼近的计算结果

图 3 理论模型异常场划分对比分析

综上所述, 应用最佳一致逼近滤波器分离异常的精度要明显高于传统的基于 Hanning 窗的方法。

4 实例分析

孙吴—嘉荫重力剖面位于黑龙江省东北部，西起孙吴县辰清镇，经孙吴、逊克、嘉荫，一直到嘉荫河口为止。走向在辰清—孙吴段为南北向，孙吴与逊克之间近东西向，逊克与嘉荫之间近北西向，整体位于孙吴—嘉荫盆地上。孙吴—嘉荫盆地位于松辽地块的北端，东邻佳木斯地块，西南与松辽盆地相接，属于俄罗斯结雅—布列亚盆地的南部边缘，是在复杂构造环境下形成的具有断陷和拗陷双重特点的复合型断陷盆地^[10]。其内部次级构造发育，是大庆油田外围油气勘探的重点地区之一。

图4为孙吴—嘉荫剖面布格重力异常图，重力异常起伏较大，包含了8个重力高和7个重力低带，异常幅值为 $(-120 \sim 174) \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ 。由于随机

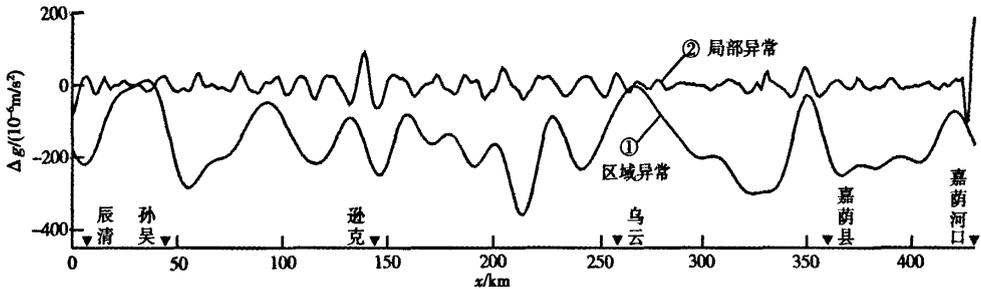


图6 孙吴—嘉荫剖面布格重力异常分离

从图6中曲线①可以看出分离出的区域场中局部场残留少，分离彻底，符合布格重力异常(见图4)中所表现出的区域异常特征，而且其明显地表现出盆地基底构造特征。曲线②中噪声的影响基本上被去除，反映了盆地的局部起伏以及地表密度不均匀特征，是对该区局部构造进行精细解释的依据。

5 结论

提出了一种可以应用于位场分离的基于 Chebyshev 最佳一致逼近原理的 FIR 数字滤波器的设计方法。该滤波器与传统的基于 Hanning 时窗函数设计出的滤波器相比，是在一致意义上对理想频率特性做最佳逼近，因而获得了较好的通带和阻带性能，是一种有效的设计方法。理论模型实验证实了该方法在分离位场时的计算精度要明显高于 Hanning 窗滤波器。在实例分析中，实现了该方法在实际位场数据处理中的应用，并且取得了较为满意的结果。当然分离效果的好坏取决于各种场的波数成分的分离程度，分析实测异常的功率谱曲线是取得成功的基础。

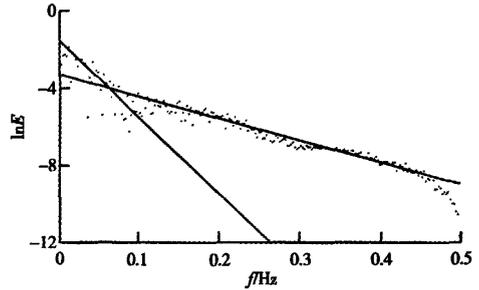


图5 孙吴—嘉荫重力剖面径向平均对数功率谱

干扰的影响，在实际资料处理过程中应该考虑到去除噪声。计算出该剖面的径向平均对数功率谱如图5所示，从图中可以得到通带截止频率为 0.06π ，利用最佳一致滤波器首先对异常进行去噪的处理，然后对该剖面的布格异常进行分离(图6)。

参考文献:

- [1] Pawlowski R S. Preferential continuation for potential-field anomaly enhancement[J]. Geophysics, 1995, 60(2): 390.
- [2] Pedersen L B. Relations between potential fields and some equivalent sources[J]. Geophysics, 1991, 56: 961.
- [3] Syberg F J R. A Fourier method for the regional residual problem of potential fields[J]. Geophysical Prospecting, 1972, 20:47.
- [4] 张凤旭,张凤琴,刘财,等. 基于余弦变换的匹配滤波方法分离重磁异常[J]. 石油地球物理勘探, 2006, 41(2), 216.
- [5] 穆石铭,申宁华,孙运生. 区域地球物理数据处理方法及其应用[M]. 长春:吉林科学技术出版社,1990.
- [6] 胡广书. 数字信号处理:理论、算法与实现[M]. 北京:清华大学出版社,1997.
- [7] McClellan J H, Parks T W. A unified approach to the design of optimum FIR linear phase digital f-filters[J]. IEEE Trans. Circuit Theory, 1973, 20:697.
- [8] McClellan J H, Parks T W, Rabiner L R. A computer program for designing optimum FIR linear phase digital filters [J]. IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1973, 21:506.
- [9] Rabiner L R, McClellan J H, Parks T W. FIR digital filter design techniques using weighted Chebyshev approximation [J]. Proc IEEE, 1975, 63:595.
- [10] 大庆油田石油地质志编写组. 中国石油地质志(卷2):上册[M]. 北京:石油工业出版社,1993.

THE APPLICATION OF CHEBYSHEV APPROXIMATION FILTER TO SEPARATING POTENTIAL ANOMALIES

JIANG Fu-yu¹, MENG Ling-shun¹, ZHANG Feng-xu¹, GAO Li-kun²

(1. College of Geo-Exploration Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China; 2. Department of Earth Sciences, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: Having investigated the design of classical FIR digital filter, the authors put forward a method of FIR filter design based on Chebyshev best uniform approximation which can be used to separate potential anomalies. In an experiment on the theoretical model, the maximum error of regional anomaly separation by low pass filter of Hanning window is $6.266 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, the mean square error is $2.115 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, and the maximum percentage error is 22.2%. The errors are always higher than 10.1% when the computing points are beyond $\pm 9 \text{ km}$. On the contrary, regional and residual anomalies separated by the best uniform approximation theory fit fairly well with the theoretical anomaly, with the curves in fairly good agreement. The maximum error of regional anomaly separation is $3.101 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, the mean square error is $0.989 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$, and the maximum percentage error is 7.76% for several data on the boundary and is lower than 4.1% for the other points. The method was used to separate Bouguer gravity anomalies along the Sunwu-Jiayin profile with satisfactory results obtained. It is proved that the anomaly separation is quite complete.

Key words: Chebyshev approximation; FIR digital filter; radial average log-power spectrum; potential anomaly

作者简介: 蒋甫玉(1981-), 男, 2003年毕业于吉林大学地球探测科学与技术学院地球物理学专业, 现在吉林大学地球探测科学与技术学院攻读博士学位, 主要从事固体地球物理学研究。

上接 307 页

THE INTEGRATED APPLICATION OF COMPOSITE PROFILE AND IP METHODS TO GROUNDWATER PROSPECTING: A CASE STUDY

BIAN Zhao-jin, YE Ming-jin, LIU Bin-hui

(Hunan Institute of Geological Engineering Exploration, Zhuzhou 412003, China)

Abstract: Composite profile and induced polarization methods were applied synthetically to water searching and, as a result, a fault containing relatively abundant water was found in the working area. Then the authors arranged and conducted drilling and carried out an experiment of water-pumping. It is proved that the quality and quantity of groundwater can satisfy the requirement of the school, and hence the drinking water problem of Dongshan school is solved. The authors thus considered that the integrated application of composite profile and IP methods to water prospecting is effective in the red bed area.

Key words: red bed area; composite profile method; induced polarization method; groundwater prospecting

作者简介: 卞兆津(1964-), 男, 1987年7月毕业于成都地质学院物探系。湖南省地质工程勘察院高级工程师, 现从事地球物理勘探及基桩检测工作。