磁偶源 2.5 维瞬变电磁场全空间 FDTD 数值模拟

杨海燕,岳建华

(中国矿业大学资源与地球科学学院,江苏徐州 221116)

摘要:为解决模拟瞬变电磁场在3维介质中传播出现的计算量大、对计算机要求高等问题,使用了3维磁偶极源 来模拟2维均匀介质和层状介质中方形和薄板低阻体的全空间响应特征。模拟中使用了时域有限差分法,采用非 均匀网格和时间步长,分析了瞬变电磁场在均匀介质和层状介质中的传播规律,以及巷道和交界面对场的影响特征,为解释全空间均匀介质和层状介质 TEM 异常提供参考。

关键词:磁偶源;瞬变电磁场;时域有限差分法;模拟计算

中图分类号: P631 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 8918(2008)03 - 0326 - 05

瞬变电磁法的三维正演模拟一直是人们关注的 焦点,但由于计算机内存、CPU等条件的限制,模拟 难度非常大。多次的模拟经验表明,当计算的数据 文件的大小超过内存后,计算速度变得非常慢,而 2.5 维(二维模型三维源)模拟则可以进行。

笔者从麦克斯韦方程组出发,使用时间域有限 差分法(FDTD),推导出无源瞬变电磁场的二维有 限差分格式,并采用均匀全空间中阶跃波脉冲信号 下激发的磁偶极源(三维)作为初始源。为了模拟 较大区域,使用了非均匀网格对场域进行剖分。另 一方面,考虑到解的收敛性,初始时间步长最大只能 设置为10⁻⁸s,而要得到毫秒级的模拟结果,迭代次 数将超过10⁵次,因此在模拟中也使用了非均匀时 间步长,从而使工作量相对减小。文中仅模拟了均 匀介质和层状介质中巷道底板岩层内部方形和直立 板状低阻异常体的响应特征,绘制出了不同时刻磁 场强度的垂直分量 H₂及其对时间的偏导∂H₂/∂t 的 等值线。

1 差分方程与源

1.1 差分方程的推导

在无源、均匀且各向同性的线性、非磁性介质中, Maxwell 微分方程组为:

 $\nabla \times E(r,t) = -\mu [\partial H(r,t)/\partial t],$ $\nabla \times H(r,t) = \sigma(r)E(r,t),$ $\nabla \cdot E(r,t) = 0, \nabla \cdot H(r,t) = 0,$ 由以上各式可推出无源扩散方程

 $\nabla^2 \boldsymbol{H}(r,t) - \mu \sigma(r) \left[\frac{\partial \boldsymbol{H}(r,t)}{\partial t} \right] = 0, \quad (1)$

收稿日期:2007-05-10

基金项目:国家自然科学基金(50774085);国家自然科学基金资助(40674074)

式中,E(r,t)为电场强度,E(r,t)为磁场强度, μ,σ (r)分别为磁导率和电导率。

采用非均匀网格将计算区域剖分成若干个长方 形单元,从而将求解无限大区域转化为求解各小长 方形单元。源附近网格较密,网格步长按等比级数 递增。为保证 FDTD 计算稳定性,时间离散的步长 (Δt)与空间离散步长(Δx、Δy、Δz)间应满足一定的 关系。分析表明,时间步长可选为电磁波传播一个 空间步长所需时间的一半^[5]。图1为在直角坐标系 下场域的网格剖分模型,式(1)两边对图1中的矩 形 ABCD 积分得到



图1 数值模拟的网格剖分示意

应用格林定理,有

$$\iint_{ABCD} \nabla^2 E dx dz = \oint_{ABCD} \left(\frac{\partial H}{\partial z} dx - \frac{\partial H}{\partial x} dz \right)_{\circ}$$
(3)

现应用中心差商近似替代场分量对空间、时间的偏导数,如:

$$\frac{\partial H^n(i,k)}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \Big[H^n(i+\frac{1}{2},k) - H^n(i-\frac{1}{2},k) \Big];$$
$$\frac{\partial H^n(i,k)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \Big[H^{n+\frac{1}{2}}(i,k) - H^{n-\frac{1}{2}}(i,k) \Big],$$

并对第 n 个时间步网格中心点作如下近似: $H_{i,k}^{n+1} + H_{i,k}^{n-1}$)/2,可推导出式(2)的差分格式如下:

$$H_{i,k}^{n+1} = \frac{1}{b_0 - a_0} [(b_0 - a_0)H_{i,k}^{n-1} + a_1H_{i-1,k}^n + a_2H_{i+1,k}^n + a_3H_{i,k-1}^n + a_4H_{i,k+1}^n], \qquad (4)$$
$$a_0 = (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})(\Delta z_k + \Delta z_{k+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1}) + \Delta x_i\Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+1})(\Delta x_i\Delta x_{i+1})(\Delta$$

$$\Delta z_k \Delta z_{k+1} / (4\Delta x_i \Delta x_{i+1} \Delta z_k \Delta z_{k+1}),$$

$$b_0 = \mu (\sigma_{i,k} \Delta x_i \Delta z_k + \sigma_{i+1,k} \Delta x_{i+1} \Delta z_k + \sigma_{i,k+1} \Delta x_{i+1} \Delta z_{k+1}) / 4\Delta t,$$

$$a_1 = \frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2\Delta x_i}, \quad a_2 = \frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2\Delta x_{i+1}},$$

$$a_3 = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2\Delta z_k}, \quad a_4 = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2\Delta z_{k+1}} \circ$$

1.2 初始源及边界条件

在 $t = t_0, t_1 > 0$ 时刻,将均匀全空间中阶跃波脉 冲信号下激发的磁偶极源转化为初始条件加入, t_0 、 t_1 要尽可能小。磁偶极放置在 x、y 平面上,负阶跃 波脉冲信号下激发的磁偶源产生的瞬变磁场表达式 为^[7]

$$H_{R} = \frac{2M}{4\pi R^{3}} \Big[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u e^{-(u^{2}/2)} \Big] \cos\theta ,$$

$$H_{\theta} = \frac{M}{4\pi R^{3}} \Big[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u (1 + u^{2}) e^{-(u^{2}/2)} \Big] \sin\theta ,$$

$$H_{e} = 0 \circ$$

其中,
$$M = IS; u = 2\pi R/\tau; \tau = \sqrt{2\pi\rho t \times 10^7};$$

$$\Phi(u) = \sqrt{2/\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-(t^{2}/2)} dt; R = \sqrt{x^{2} + y^{2} + z^{2}} o$$

M为磁矩,I为恒定电流值,S为电流环的面积。通 过球坐标与直角坐标间的变换关系,可将上述源表 达式转化为直角坐标下的表达式

$$H = \frac{M}{4\pi R^3} \left\{ \left[3\operatorname{erf}(\theta R) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 R^3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}\theta R\right) e^{-\theta^2 R^2} \right] \times \left(\frac{x^2}{R^2}i_x + \frac{xy}{R^2}i_y + \frac{xz}{R^2}i_z\right) - \left[\operatorname{erf}(\theta R) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 R^3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta R\right) e^{-\theta^2 R^2} \right] i_x \right\},$$

并计算出其对时间的偏导 aH/at

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{u^3}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}R^3t}e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot$$
$$u^2 \times \left(\frac{x^2}{R^2}i_x + \frac{xy}{R^2}i_y + \frac{xz}{R^2}i_z\right) + (2 - u^2)i_x\right] \circ$$

当模拟计算区域相对较小时,将第n-1个时间 步中边界面内层节点上的场值赋予第n个时间步中 边界面上相应的边界节点上^[8],如 $H_{0,k}^{n-1}$;当计 算区域较大时,使用向上延拓法处理地-空边界,将 边界近似看成无穷远,边界值设为0。

另外,初始时间步长应满足条件:



图2 二维全空间模型示意

2 全空间响应特征模拟

如图 2 所示,设巷道长 300 m、高 3 m,巷道内 空气电阻率为 ρ_0 = 30 000 $\Omega \cdot m$,大地电阻率 ρ_1 = 200 $\Omega \cdot m, \rho_2$ = 100 $\Omega \cdot m, \rho_3$ = 400 $\Omega \cdot m,$ 低阻体电 阻率 ρ_4 = 2 $\Omega \cdot m_o$ 方形低阻体大小为 50 m × 50 m, 薄板状低阻体在图 2a 中为 112 m × 4 m,在图 2b 中 为 100 m × 4 m,且低阻体均处于 10 号点正下方。 模拟时发射和接收点均处在同一点。

2.1 均匀介质中低阻异常体的响应特征

图 3 为在 10 号点处发射并观测到的磁场的垂 直分量 H, 等值线。由图 3a、c 可见,在 t = 5.2 μs 时,磁场等值线受低阻体的影响发生畸变,在低阻体 附近等值线较密集,磁场的扩散速度明显降低,衰减 变慢。由于在巷道底板上发射,受巷道影响,在发射 源处等值线呈凸形,其原因是磁场穿出巷道时时间 的延迟,同时受低阻体的"吸引"影响,使低阻体中 垂线上的等值线产生扰动,弯向低阻体。由图 3b、d 可见,t=1.5 ms时,磁场已覆盖低阻体,方形低阻体 成为"烟圈"的中心,外围"烟圈"已穿出了场域边 界;而此刻并未以整个薄板为中心产生"烟圈", "烟圈"只在低阻体的尾部聚集,范围较小。发射点 上、下方等值线的扰动变小但仍然可以分辨。

图 4 为以 1~19 点处观测的 ∂H,/ ∂t 值绘制的等

值线剖面。在t = 6 μs(图 4a、c)时刻,巷道两端的 等值线受巷道影响较大,形成半"烟圈",而中间影 响较小,等值线近似呈水平分布,2 个低阻体附近的 等值线均受其影响而变形,在薄板尾部刚形成"烟 圈";而到t = 1.5 ms 时(图 4b、d),已在方形低阻体 处、薄板尾部形成较为明显的"烟圈",等值线受低 阻体的影响已不呈水平或近似水平分布,可以看出 薄板的影响幅度和范围比方形低阻体大,而此时巷 道的影响已不明显。





图4 均匀介质中不同时刻∂H_z/∂t等值线

160 -160-80 80 160 (a) t=5.2 µ s 1(b) t = 1.5 m80 80 1 02 **m**/2 -80 m/2 -80 ñ P 0.2300 -160-160 P P3 -240 -240x/mx/m-160 -800 80 160 -160 -90 n 90 160 (c) t=5.2 µs 80- (d) t=1.5 ms 80-01 -80 -80/m p. p -160 -160

图 5 层状介质中不同时刻 H, 等值线

-240

P a

.r/m *x/m* 120 240 960 120 240 360 a) 1=8µ 3 =1.5 r 80 80 0 n 0.6 10 -80 11 -80503125 -160-160P -240 -240 1:20 240 360 120 2.40 360 (c) t=8µs (d) t=1.5 m80 80 0 0 1m -80 1 -80-0. -160 -160-240 -240



2.2 层状介质中巷道低阻异常体的响应特征

m/i

-240

由图 $5a_{c}$ 可见, 与均匀介质相比,等值线在 ρ_{2} 层较密集,在 ρ_2 、 ρ_3 交界面上出现明显的"折痕",而 $\Phi_{\rho_{2},\rho_{1}}$ 交界面上则不明显。这是因为 ρ_{2},ρ_{3} 电阻 率差异相对较大, $m \rho_2, \rho_1$ 差异小。在 t = 1.5 ms 时 刻(图5b、d),这种"折痕"已不可辨。由于低阻体 处于电阻率相对较高的 ρ_3 层中,使方形低阻体处、 薄板尾部的等值线环较均匀介质中扩散得快。

图 6 为 1~19 点处观测的 aH,/ at 值绘制的等值 线剖面。在 t=8 µs 时刻(图 6a、c)不能清楚地看到 各层交界面的影响,但2个低阻体对等值线的影响 已清晰可见,在薄板的尾部已出现几个等值线环。

通过使用不同的时间步长,经过若干次迭代后,各交 界面的影响已可分辨(图6b、d),等值线在交界面附 近呈波浪状,逐渐向外扩散,在低阻体下方即远离交 界面处没有受到明显的影响。在若干个时间步以 后,交界面的影响将逐渐减弱,波浪线逐渐平滑,最 后变为多条竖直直线。

ø

3 结论

应用时域有限差分法,采用非均匀网格和时间 步长,模拟了均匀介质和层状介质中低阻异常体的 响应特征及交界面对等值线的影响。巷道在"早 期"对磁场的影响较为明显,在发射源处等值线呈 "凸"形;而交界面的影响表现在"晚期",使等值线 在交界面附近呈波浪状,逐渐向外扩散。瞬变场的 分层能力表现在磁场的垂直分量 H,等值线图的 "早期"和∂H,/∂t等值线剖面图的"晚期",而低阻体 的响应在两种模型中都非常明显,这也说明了瞬变 电磁法对低阻体反映灵敏,分层能力强。为解决煤 层顶板(或底板)岩层内部的富水异常区探测、巷道 掘进迎头前方的突水构造预测、含水陷落柱勘查等 水文地质问题提供了依据。

参考文献:

- Stefi, Krivochieva J. Whole-space modeling of a layered earth in time-domain electromagnetic measurements [J]. Journal of Applied Geophisics, 2002, 50:375.
- [2] Hoversten G, Morrison H. Transient fields of a current loop source

above a layered earth[J]. Geophysics, 1982, 47:1068.

- [3] Das U. A reformalism for computing frequency and time-domain EM responses of a buried, finite-loop[C]//Annual Meeting and Abstracts. SEG, Houston, TX, 1995,811.
- [4] Willian A S, Perry A E, Hohmann G W. The effect of a conductive half space on the transient electromagnetic response of a three dimensional body[J]. Geophysics, 1985, 50(7):1144.
- [5] 倪光正,杨仕友.工程电磁场数值计算[M].北京:机械工业出版社,2004:113.
- [6] 米萨克 N 纳比吉安. 勘查地球物理电磁法(第1卷)[M]. 赵经祥, 王艳君译. 北京: 地质出版社, 1992:162.
- [7] Alexander A Kaufman, George V Keller. Frequency and transient soundings[M]. Elsevier Science Publishes B V, 1983.
- [8] Taflove A, Umashankar K R. Radar Cross Section of Greneral Three-Dimensional Scatteres [J]. IEEE Trans on EMC, 1983, 25 (4):433.

2.5-D NUMERICAL SIMULATION ON THE WHOLE-SPACE TEM FIELD WITH A MAGNETIC DIPOLE SOURCE

YANG Hai-yan, YUE Jian-hua

(School of Resource and Earth Science China University of Mining&Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: Because of the huge computation and limitation of computer resource when modeling the diffuse of the transient field in three dimensional medium, FDTD, the nonuniform grid and time step length will be used to study the whole-space response characteristic of two dimensional square and sheet conductive body, located both in uniform medium, and in the layered medium, with a 3 dimensional magnetic dipole, And the diffused regularity of the transient field in them, the effect of laneway and boundary will be also discussed. The objectives are to provide interpretation guidelines for the TEM anomalies arising from the full-space uniform and layered medium.

Key words: Magnetic dipole source; Transient electromagnetic field; FDTD method; Modeling

作者简介:杨海燕(1980-),男,2004 年毕业于中国矿业大学理学院信息与计算科学专业,现为中国矿业大学资源学院应用 地球物理专业博士研究生。