基于埃尔米特多项式的子波计算新方法

刘保童1,王玉强2

(1. 天水师范学院 物理与信息科学学院,甘肃 天水 741000; 2. 宁夏地球物理地球化学勘察院,宁夏银川 750021)

摘要:介绍了一种递推计算震源子波的简便方法,利用埃尔米特多项式与高斯函数的乘积来计算,不必直接求导数,也不需要这些多项式的显式表达式。结果表明,计算的子波能更精确地模拟震源脉冲波形。

关键词:埃尔米特多项式;子波;高斯函数;正演模拟

中图分类号: P631.4 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 8918 (2009) 05 - 0580 - 03

地震波场和电磁波场的正演模拟通常使用雷克 子波作为震源波形^[1-3]。在钻孔声波等应用中,震 源波形比传统的雷克子波有更多的周波数,对这种 震源脉冲,更为逼真的表示是用高斯函数的更高阶 导数来得到。笔者巧妙地利用这些导数与埃尔米特 多项式(Hermite polynomial)之间的一个关系,计算 这些更高阶导数,而不是直接去计算它们。任意阶 的高斯导数可由原始高斯函数与一个简单多项式的 积计算,取导数是不必要的,也不需要这些多项式的 显式表达式,因为它们满足一个递推关系,所以,可 由两个较低阶的多项式计算。通过与钻孔声波测井 中实测的波形比较可以看出,计算得到的子波能够 比雷克子波更逼真地表示实际波形。

1 埃尔米特多项式与高斯函数的导数

埃尔米特多项式是正交的,因此可以通过罗德 里格斯公式^[4]表示为

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$$
(1)

式中,*n*=1,2,…,指定导数和多项式的阶。解出高 斯函数的导数,使用关系(-1)⁻*=(-1)^{*},给出

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}e^{-t^{2}} = (-1)^{n}H_{n}(t)e^{-t^{2}}$$
(2)

式中,右边是埃尔米特多项式与零均值、单位方差高 斯函数的乘积。该式的讨论见文献[4]。

我们希望震源脉冲是因果的,且有单位峰值振 幅。对高斯函数而言,负时间的振幅为零不能达到, 因为其长度是无限的。在数值应用中,这不是障碍, 因为使值变为零等价于可忽略的很小的振幅。因

收稿日期:2008-09-11

此,需要沿正时间轴平移脉冲,直到负时间的振幅很 小可忽略为止(准因果性)。为了有最大的灵活性, 使用如下形式的高斯函数

$$g(t) = e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma}},$$
 (3)

$$H_n^{\sigma}(t) = (-1)^n e^{\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma}}$$
(4)

它们由阶数 n_x 均值 t_0 和方差 σ 表征。这里的上标 意思并不是取 H_n 的 σ 次幂。置 $\sigma = 1/2, t_0 = 0, 得$ 到标准的埃尔米特多项式,即式(1)。式(3) 中高斯 变量上的因子 1/2 是为了数学上的方便。

最初的两个广义埃尔米特多项式是 $H_0^{\sigma} = 1$ 和 $H_1^{\sigma} = (t - t_0)/\sigma$,通过递推关系

$$H_{n+1}^{\sigma} = \frac{t - t_0}{\sigma} H_n^{\sigma}(t) - \frac{n}{\sigma} H_{n-1}^{\sigma}(t) , \qquad (5)$$

可从低阶多项式导出高阶多项式(n≥1)。

使用广义埃尔米特多项式,任意均值和方差高 斯函数的 n 阶导数成为

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}g(t) = (-1)^{n}H_{n}^{\sigma}(t)e^{-\frac{(t-t_{0})^{2}}{2\sigma}},$$
 (6)

这个关系与埃尔米特多项式的递推公式使任意阶高 斯导数的计算成为一项简单容易的工作。

2 波形计算中有关参数的分析与说明

2.1 可调节的中心频率

由不确定原理^[5]可知,时间域和频率域中的变 化是耦合联结的。对高斯导数,时间的变化也是与 其振幅谱的主频相关联,为明白这一点,考虑式(3) 中高斯函数的 n 阶导数的傅里叶变换

$$\mathbf{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}g(t)\right] = \sqrt{2\pi\sigma} (2\pi\mathrm{i}f)^{n} \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}g}{\sqrt{2\sigma}}} \mathrm{e}^{-2\pi^{2}\sigma f^{2}} \quad (7)$$

取绝对值,对f求一阶导数,令导数等于零,给出

$$\sqrt{2\pi\sigma}(2\pi)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}(|f^n| e^{-2\pi^2\sigma f^2}) = 0 \qquad (8)$$

化简得到

$$f^{2} = \frac{n}{4\pi^{2}\sigma}$$
(9)

于是,可求出方差 σ ,用期望的主频f表示高斯导数

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}g(t) = (-1)^{n}H_{n}^{\sigma}(t)e^{-\frac{(2\pi \eta_{0})^{2}(t-\eta_{0})^{2}}{2n}}$$
(10)

在这里,时间方差、导数的阶和主频通过式(9)联系 起来,如果期望有一个主频为 f_0 的n阶导数子波, 那么,原始高斯函数需要有 $n(2\pi f_0)^{-2}$ 的方差。

2.2 归一化和时移

为把子波归一化成单位最大振幅,我们简单地 用 $C = \max | d^{n}g(t)/dt^{n} | 去除。沿正时间轴平移可$ $获得准因果的子波波形,我们需要时移 <math>t_{0}$,使得在t=0 时

$$\left| C^{-1} H_{n}^{\sigma}(t) e^{\frac{-2\pi f_{0}(2t)}{2n}} \right| < \varepsilon$$
 (11)

 ε 是由用户定义的一个阈值。因为在计算结束之前,归一化常数是不知道的,不能由上面的不等式估计 t_0 。由于认识到时移取决于主频,许多作者使用 $t_0 = f_0^{-1}$ 。笔者提出 t_0 也依赖于导数的阶数 n,数值 试验表明,当

$$t_0 = \sqrt{n} \cdot f_0^{-1}$$
 (12)

时,保证了 ε 在 10⁻⁶数量级。注意,由于高斯函数 及其导数关于 $t = t_0$ 点的对称性,可以把计算的波形 长度限定为 $2t_0$ 。

2.3 采样间隔

一般来说,导数的阶越高,主频越大,所需的采 样间隔越小。令最大频率 $f_{max} = n^2 f_0$,可得到满意的 结果,此时抽样间隔

$$\Delta t = 0.5/(n^2 f_0) \, \, (13)$$

3 算例

给定主频 f₀,可以很容易地计算各阶高斯导数 的子波,使我们能够选取最恰当的子波,更精确地模 拟震源脉冲波形。

图 1 是 Chen 在他的实验中用同一个探头 C 测 得的 2 个不同的压电换能器的震源脉冲^[6],换能器 A 主频约 425 kHz,换能器 B 主频约 300 kHz,2 个波



图 3 传统的三腹点雷克子波

形都显示出3个特征峰值和2个明显的极小值。对 于这2个波形,合适的模拟是主频与实测波形主频 相同的高斯函数的10阶导数,用本文方法计算的结 果见图2(n=10)。由图可见,峰值与极小值的数量 与实测波形一致,尽管尾部有微小差别,但比传统的 三腹点雷克子波(高斯子波的二阶导数)更逼真,雷 克子波仅有1个峰值和2个极小值(图3)。

图4显示的是在装满水的容器中测量的商业声



图4 商业声波测井仪单极换能器的输出

波测井仪单极换能器的输出,主频约18 kHz,在最 初的0.1 ms内可观察到1个清楚的极小值和22个 特征峰值,第二个峰值的振幅大约是第一个峰值的 2 倍。对这个脉冲合适的模拟是18 kHz 高斯函数 的5 阶导数(图5)。

4 结束语

笔者给出了一种计算任意阶高斯导数波形的方法,计算得到的子波能够比雷克子波更逼真地表示 实际波形。通过计算高斯函数的5阶导数和10阶 导数并与钻孔声波测井中实测的波形比较,说明了 该方法的效用。这种算法一般可用于震源的数值模 拟。





参考文献:

- Alford R M, Kelly K R, Boore F M. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation [J]. Geophysics, 1974, 39: 834.
- [2] Holliger K, Bergmann T. Numerical modeling of borehole georadar data[J]. Geophysics, 2002, 67:1249.
- [3] 宁刚,熊章强,陈特逊.波动方程有限差分正演模拟误差来源 分析[J].物探与化探,2008,32(2):203.
- [4] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 北京:高等教育出版社,1998.
- [5] 张贤达. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京:国防工业出版 社,1998.
- [6] Chen S T. The full-acoustic wave train in a laboratory model of a borehole[J]. Geophysics, 1982, 47:1512.

A NOVEL PROCEDURE OF WAVELET COMPUTATION BASED ON HERMITE POLYNOMIALS

LIU Bao-tong¹, WANG Yu-qiang²

(1. College of Physics and Information Science, Tianshui Normal University, Tianshui 741000, China; 2. Ningxia Institute of Geophysical and Geochemical Exploration, Yinchuan 750021, China)

Abstract: This paper introduces a novel procedure for computing source waveforms, in which the direct derivation is not necessary, and the explicit expressions for these polynomials are also not required. The computation is performed recurrently via the product of a Hermite polynomial and the Gaussian. Numerical tests reveal that the computed wavelets can model source pulse more precisely.

Key words: Hermite polynomial; wavelet; Gauss function; forward modeling

作者简介:刘保童(1965-),男,副教授,1986年毕业于西安地质学院物探系,2006年在西安科技大学获矿业工程专业博士学位,主要从事地震信号处理及物理学的科研与教学工作,出版科研专著1部,译著1部,发表论文10余篇。

33 卷