二度体的重力张量有限元正演模拟

朱自强[1], 曾思红[1], 鲁光银[1], 严文婕[2]
(1. 中南大学 信息物理工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 江苏省有色金属华东地质勘查局, 江苏 南京 210007)

摘 要: 介绍了重力梯度张量,并将有限单元法应用于二维重力梯度张量的正演计算。为了验证有限元正演方法的精度,对截面为矩形的两个二度体组合模型进行有限元正演模拟,结果表明正演曲线与理论曲线形态一致,拟合情况好。通过对截面形状不规则、密度分块均匀的二度体进行正演模拟,说明有限元法可通过网格剖分来逼近不规则目标体的边界,并对剖分单元赋予不同的密度值来实现对复杂二度体的重力张量的正演模拟。

关键词: 复杂二度体;重力张量;有限元;正演模拟
中图分类号: P631.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-8918(2010)05-0668-04

重力梯度张量测量测的是重力位的二阶导数(V_{xx}, V_{yy}, V_{xy}, V_{yz}及 V_{xz}),相比传统的重力场及重力场垂直分量的测量,这些二阶导数具有更高的分辨率,能够反映场源体形态的细节,且重力梯度张量各分量之间的不同组合可以产生简单、易解释、更固定、与场源的大小和形状更相关的独立于坐标的不变量。

作为一种前沿性的重力测量方法,重力梯度张量的应用前景非常广阔。重力梯度张量测量及数据处理技术在国外已经开展了十多年,并取得了一定的效果。目前国外最先进的重力梯度张量测量系统——Bell Geospace 公司的三维全张量梯度测量系统 Air-FTGTM(full tensor gravity gradiometry),可以测量全部的五个独立的重力梯度张量元素,精度约为 5~10 E,空间分辨力约为 0.5~1 km。国外重力梯度张量的数据处理技术有 Euler Deconvolution 法[1]、三维正则化收敛(three-dimensional regularized focusing inversion)法[2]等反演方法以及一维自适应小波滤波技术[3]、二维功率和法则(2D power-sum rules)[4]等去噪方法,它们都对重力全张量梯度数据进行分析处理。重力张量数据的获取多是由实际测量获得;或是把地下质量体划分成多个立方体元,假设每个立方体元密度均匀,再对这些立方体元进行正演计算[2];或对垂向重力数据采用快速傅里叶变换(FFT)[5],获取完整的重力梯度张量数据。

目前国内对重力张量的测量技术及相关数据解释技术仍是空白。过去人们大多只对重力张量的单个或多个分量,即重力位的二阶导数进行讨论,没有把张量作为一个整体来研究。重力梯度的求解可在空间域和波数域中进行。空间域主要是利用数值积分方法求解重力场或重力场垂直分量,然后利用差商[6]、样条函数插值法[7]计算位场的二阶导数,但这些方法的计算精度受到一定的限制。波数域大多采用傅里叶变换或是余弦变换[8],利用谱分析原理来实现,其理论较为完善,但由于函数的非周期因子以及有限截断的影响,其应用范围受到很大的限制,而且计算精度也不高。

有限元法作为地球物理数据正演的方法之一,能真实地反映复杂情况下地球物理场的分布,是处理不均匀介质和求解复杂边界形状问题的有效工具。徐世浙[9]、蔡永恩[10-11]等人用不同的边界条件来求解重力场及重力场的垂直分量,其结果都具有较高的精度和计算速率。笔者尝试利用有限单元法来对二度体的重力梯度张量进行正演模拟。

1 基本理论

重力梯度是张量,共有 9 个分量。由于在地球外部,位场满足拉普拉斯方程 $V_{xx}+V_{yy}+V_{zz}=0$,以及重力场的无旋性 $V_{xy}=V_{yx}$、$V_{yz}=V_{zy}$、$V_{zx}=V_{xz}$,因此重力梯度张量中只有 5 个分量是独立的[12]。对于二度体,假设地质体沿 y 轴方向无限延伸,位场沿 y 方向的导数为零,所以重力梯度张量可以写为下列形式:

收稿日期:2009-07-22;修回日期:2010-04-28

$$\boldsymbol{g}_{zz} = \begin{pmatrix} V_{xx} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

由于 $V_{xx}+V_{zz}=0$、$V_{xz}=V_{zx}$，因此二维重力梯度张量中只有 2 个分量是独立的。

2　重力梯度张量的有限元正演技术

2.1　边值问题

重力位 V 和重力异常 g 满足的边值问题如下[9,11]

$$\begin{cases} \nabla^2 V = -4\pi G\rho, \\ V(x,y,z)\mid_{\Gamma_\infty} = 0, \\ g(x,y,z) = -\partial V/\partial z, \end{cases} \tag{2}$$

式中：G 是万有引力常数，ρ 是密度差，Γ_∞ 是无穷远边界。

2.2　变分问题

与边值问题式(2)等价的变分问题为[9,13]：

$$\begin{cases} F(g) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}(\nabla g)^2 - 4\pi G\rho\frac{\partial g}{\partial z}\right]\mathrm{d}\Omega + \\ \qquad \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\infty}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}g^2\mathrm{d}\Gamma, \\ \delta F(g) = 0。\end{cases} \tag{3}$$

式中：Ω 为计算区域，r 是地下目标体的质心至边界点的距离，θ 为 r 与水平线的夹角，α 是边界外法线 $\boldsymbol{n}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的夹角(图 1a)。

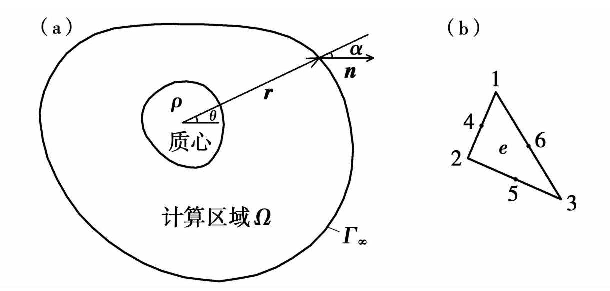

图 1　有限单元计算区域(a)及三角形二次插值单元 e (b)示意

2.3　有限单元法

从方程(3)解出的是重力场垂直分量 g，对 g 求导才能得到重力张量。为了提高计算精度，对计算区域 Ω 采用三角单元的二次插值来求解。

2.3.1　单元分析

图 1b 是一个三角形二次插值单元：1、2、3 是顶点，4、5、6 是三角形边的中点。用三角形二次插值单元对计算区域进行剖分，即：

$$g = \sum_{i=1}^{6} N_i g_i。 \tag{4}$$

式中：g_i 是三角形各节点上的重力异常，$N_i(i=1,\cdots,6)$ 为形函数，而且

$$N_i\mid_{i=1,2,3} = (2L_i-1)L_i,\quad N_4 = 4L_2L_3,$$
$$N_5 = 4L_3L_1,\quad N_6 = 4L_1L_2。$$

这里，$L_i\mid_{i=1,2,3} = \frac{1}{2S}(a_ix+b_iz+c_i)$，是 x 和 z 的线性函数；$S=\frac{1}{2}(a_1b_2-a_2b_1)$，是三角形单元的面积，其中

$$a_1 = z_2-z_3, a_2 = z_3-z_1,$$
$$a_3 = z_1-z_2, b_1 = x_3-x_2,$$
$$b_2 = x_1-x_3, b_3 = x_2-x_1,$$
$$c_1 = x_2z_3-x_3z_2, c_2 = x_3z_1-x_1z_3,$$
$$c_3 = x_1z_2-x_2z_1,$$

(x_1,z_1)，(x_2,z_2) 和 (x_3,z_3) 是三角形单元三个顶点的坐标。

通过网格剖分，把积分区域剖分为许多的三角形单元，从而把式(3)中的积分分解为各三角单元 e 上的积分。

计算各单元的积分

$$F_e(g) = \int_e \frac{1}{2}(\nabla g)^2\mathrm{d}\Omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1e}\boldsymbol{g}_e, \tag{5}$$

其中：$\boldsymbol{g_e}$ 是单元中的 6 个节点的 g 值的列向量，$\boldsymbol{K}_{1e}=(k_{ij})$，$k_{ij}=k_{ji}$，$i,j=1,\cdots,6$，而且

$$k_{ij} = \iint_\triangle\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z。 \tag{6}$$

设三角元 e 内的密度 ρ 均匀，则

$$\int_e 4\pi G\frac{\partial g}{\partial z}\rho\mathrm{d}\Omega = \boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_e, \tag{7}$$

其中，

$$\boldsymbol{P}_e = \frac{4\pi G\rho}{6}(b_1\quad b_2\quad b_3\quad -4b_1\quad -4b_2\quad -4b_3)^{\mathrm{T}},$$

$$b_1 = x_3-x_2, b_2 = x_1-x_3, b_3 = x_2-x_1,$$

x_1、x_2 和 x_3 是三角形 3 个顶点的 x 坐标。

如果三角形的边 l 落在 Γ_∞ 上，则

$$\frac{1}{2}\int_l\frac{\sin(\theta-\alpha)}{r\sin\theta}g^2\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{2e}\boldsymbol{g}_e, \tag{8}$$

其中，

$$\boldsymbol{K}_{2e} = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{30\mid r\mid\sin\theta}l\begin{pmatrix} 4 & & & & & \\ -1 & 4 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 2 & 0 & 16 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

l 为线段 $\overline{12}$ 的长度。

2.3.2　整体合成

在每个三角元内，将式(5)、式(7)和式(8)相加，再扩展由全体节点组成的矩阵或阵列，进而全部单元相加，得

$$F(g) = \sum F_e(g) =$$

$$\sum \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1e}\boldsymbol{g}_e - \sum \boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_e + \sum \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{2e}\boldsymbol{g}_e =$$

$$\sum \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{1e} + \boldsymbol{K}_{2e})\boldsymbol{g}_e - \sum \boldsymbol{g}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_e =$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}K\boldsymbol{g} - \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}, \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{g}$ 是全部节点组成的列向量；$\boldsymbol{K} = \sum(\boldsymbol{K}_{1e} + \boldsymbol{K}_{2e})$，$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{P}_e$。

对式(9)求变分，并令其为0，得线性代数方程组

$$\boldsymbol{Kg} = \boldsymbol{P}。\tag{10}$$

解方程组，得各节点的重力异常 g。

2.4 求解二维重力梯度张量

求得 g 后，根据插值公式

$$g = N_1 g_1 + \cdots + N_m g_m,$$

可以得到 g 的导数[9]：

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} g_e, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}} g_e。\tag{11}$$

笔者采用三角形的二次插值进行网格剖分，则

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial N_6}{\partial x}\right),$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial N_1}{\partial z} \quad \cdots \quad \frac{\partial N_6}{\partial z}\right)。$$

这样，求得各节点的重力异常 g 后，重力张量分量 V_{zz}、V_{zx} 是分别对 g 求 z 方向和 x 方向的导数而得出。在一个单元内各节点的重力梯度按式(11)计算，对于相邻诸单元的公共节点，则用各单元求得的该节点的梯度的平均值，作为该点的重力张量。

3 行性和精度验证

对两个二度长方体（沿 y 轴无限延伸）构成的组合模型进行有限元正演模拟，对比理论曲线与正演结果以验证该算法的稳定性和精度。

模型参数选取：两个矩形截面中心在地面上的投影坐标(x,z)分别为$(-50,0)$及$(40,0)$；左边矩形顶部埋深为30 m，高度为50 m，宽为60 m；右边矩形顶部埋深为60 m，高度为40 m，宽为40 m。两个异常体密度均匀，剩余密度为1 g/cm^3（图2b）。

图2a显示了两个矩形截面的二度体的理论结果[14]与有限元正演结果的对比情况。从图中可看出，除了靠近边界的数据由于无穷远边界的人为选取引起误差较大外，正演结果与理论曲线形态一致，拟合情况好。而靠近边界数据的较大误差可以通过相应增大计算区域来校正，但是计算区域太大，正演计算所需的时间将增大，所以实际正演过程中可以通过所需的数据量来决定计算区域的大小。

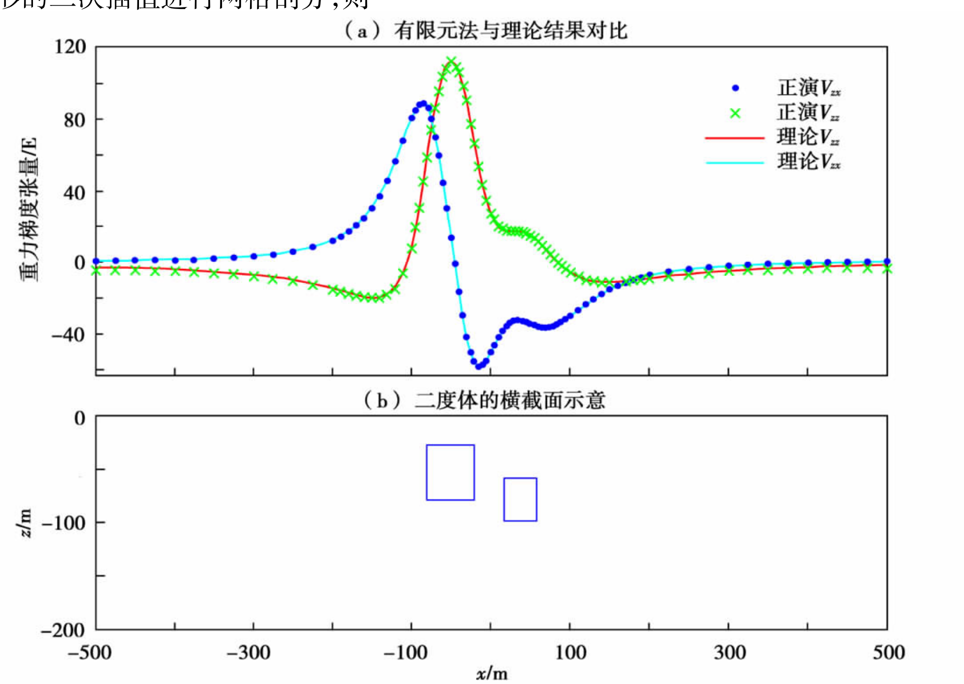

图2 两个矩形截面二度体的 V_{zz}、V_{zx} 理论结果与有限元正演结果对比

图2(a)中的 V_{zz}、V_{zx} 分辨出这两个目标体的存在位置，其中 V_{zz} 的两个极大值点分别对应两个目标体的中心；V_{zx} 曲线存在四个极值点，为两对极大、极小值点，分别对应两个目标体的左右边界。

4 不规则模型试算

模型参数选取：二度体的截面为不规则四边形，

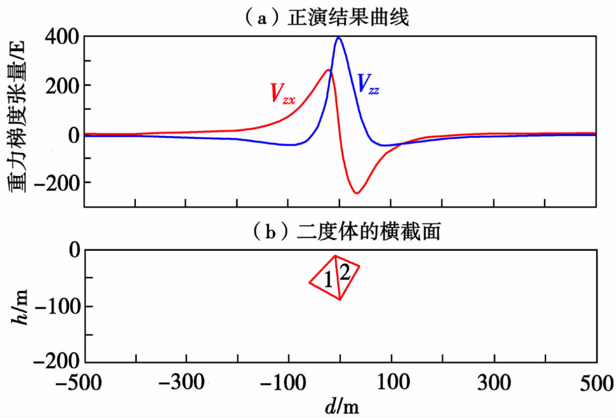

图 3　不规则四边形截面二度体的 V_{zz}、V_{zx} 有限元正演结果

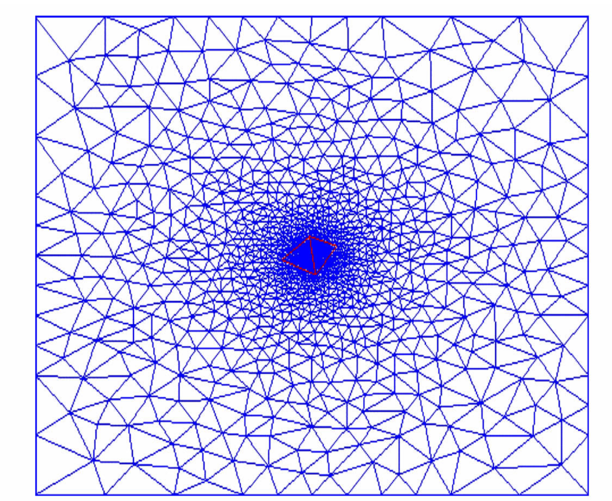

图4　不规则四边形截面二度体有限元正演计算的网格剖分

四边形的两组对边均不平行;二度体分成左右两部分,剩余密度分别为 1、2 g/cm^3。四边形截面的形状、大小、位置及密度差异见图 3b,图中数字代表密度差。

图 4 为该二度体有限元正演计算的网格剖分图。本文中的网格剖分利用了大型通用有限元软件 ANSYS 所提供的强大的网格剖分功能,来实现二维重力模型的非结构化三角形网格剖分。ANSYS 提供了一个强大的网格划分工具栏,其中包括单元属性选择、单元尺寸控制、自由划分与映射划分等网格剖分中可能用到的所有命令,用户可以根据需要方便地设置控制网格划分的参数。从图中可看出,剖分网格很好地拟合了四边形二度体的边界,且在靠近目标体的地方网格密度较大,远离目标体的地方网格较稀疏。

图 3a 为不规则四边形截面二度体的有限元正演曲线,可以看出有限单元法的通过网格划分及对不同单元赋不同的密度值,实现对边界形状任意、密度不均匀的复杂目标体进行计算。

5　结论

对两个二度长方体构成的组合模型进行有限单元法的正演计算,证明该方法在重力张量正演计算中的有效性。另外通过对截面不规则、密度分块均匀的二度体进行正演,说明有限单元法可用来对复杂目标体进行正演,为三维模型的重力张量正演提供了思路。

有限单元法的最大优势在于可计算形状任意、密度任意的复杂目标体。随着计算机技术的发展,CAD/CAE 的集成及 ANSYS 等大型有限元软件提供了强大的有限元建模及网格剖分功能,实现了有限元在三维复杂模型中的正演计算。笔者把有限单元法应用到重力张量的正演,通过有限元网格剖分的性质,实现对形状任意、密度任意的复杂目标体的正演,尤其是在网格不变的情况下,只要将不同单元赋以不同密度值,很快就能计算出不同模型在整个空间的重力梯度张量,所以有限单元法尤其适合于正演拟合的重力梯度张量反演计算。

参考文献:

[1]　Zhang C, Mushayandebvu M F, Reid A B, et al. Euler deconvolution of gravity tensor gradient data[J]. Geophysics, 2000, 65: 512.

[2]　Zhdanov M S, Ellis R, Mukherjee S. Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data[J]. Geophysics, 2004, 69: 925.

[3]　Lyrio J, Tenorio L, Li Y. Efficient automatic denoising of gravity gradiometry data[J]. Geophysics, 2004, 69: 772.

[4]　While J, Jackson A, Smit D, et al. Spectral analysis of gravity gradiometry profiles[J]. Geophysics, 2006, 71(1): 11.

[5]　Mickus K L, Hinojosa J H. The complete gravity gradient tensor derived from the vertical component of gravity: a Fourier transform technique[J]. Journal of Applied Geophysics, 2001, 46: 159.

[6]　杨辉,王宜昌. 复杂性体重力异常的高阶导数正演计算[J]. 石油地球物理勘探, 1998, 33(2): 278.

[7]　汪炳柱. 用样条函数法求重力异常二阶导数和向上延拓计算[J]. 石油地球物理勘探, 1996, 31(3): 415.

[8]　张凤旭,孟令顺,张凤琴,等. 重力位谱分析及重力异常导数换算新方法——余弦变换[J]. 地球物理学报, 2006, 49(1): 244.

[9]　徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京:科学出版社, 1994: 215.

[10]　蔡永恩,王其允. 有限元方法计算重力异常的新边界条件[G]//大地测量与地球动力学进展. 2004: 470.

[11]　蔡永恩,王奇允,张健,等. 用有限单元法计算不均匀密度地区的重力异常[C]//中国地球物理 2003:中国地球物理学会第十九届年会论文集. 2003: 640.

[12]　Saad A H. Understanding gravity gradients: a tutorial[J]. Leading Edge, 2006, 25(8): 942.

下转 685 页

参考文献:

[1] 李志林,朱庆. 数字高程模型[M]. 武汉:武汉出版社,2001.

[2] 汤国安,刘学军,闾国年. 数字高程模型及地学分析原理和方法[M]. 北京:科学出版社,2005.

[3] 程耀东. 图形数据库应用技术研究[J]. 工程图学学报,2006,27(1).

[4] 老大中,赵占强. AutoCAD 2000 ARX 二次开发实例精粹(ObjectARX)[M]. 北京:国防工业出版社,2001.

[5] 程耀东,张丽萍,韩进,等. 计算机绘图教程与二次开发方法[M]. 兰州:甘肃科技出版社,2009.

[6] 陈影,程耀东,闫浩文. 基于 VC + + 、ObjectARX 的边角网平差系统的设计[J]. 物探与化探,2007,31 (1).

THE AUTOMATIC FILLING METHODS FOR STRATIGRAPHIC SECTION BASED ON ObjectARX 2007

CHENG Yao-dong[1], XU Fei[2], Dong Ming-cai[3]

(1. *School of Civil Engineering*, *Lanzhou Jiaotong University*, *Lanzhou* 730050, *China*; 2. *Gansu Base and Foundation Co. Ltd.*, *Lanzhou* 730070, *China*; 3. *China Railway No.* 1 *Survey and Design Institute Group Co. Ltd.*, *Xi'an* 710043, *China*)

Abstract: In the CAD software for highway and railway route selection design, it is absolutely necessary that the lamination pattern be filled in the route stratigraphic section. On the basis of studying the structure of AutoCAD drawing database, and on the drawing platform of AutoCAD 2007, the authors made a tentative discussion on the generation of filling boundaries, development of hatch pattern library and invoking of pattern, using Visual C + + 2005 compiling environment combined with library functions of ObjectARX. With these methods, we can accomplish automatic generation of closed field boundary and calling-filling of the hatch pattern.

Key words: computer aided design; stratigraphic section; filling pattern; ObjectARX development kit

作者简介:程耀东(1963 -),男,教授,1996 年毕业于西南交通大学土木工程专业,研究方向:土木工程 CAD 和三维可视化,公开发表学术论文 20 余篇。

上接 671 页

[13] Zhang J, Wang C Y, Shi Y, et al. 3D crustal structure of Central Taiwan from gravity inversion with parallel genetic algorithm[J]. Geophysics, 2004, 69:917.

[14] 侯重初,刘奎俊. 重磁异常场及其高阶导数的正演公式与程序[M]. 北京:地质出版社,1990:33.

FINITE ELEMENT FORWARD SIMULATION OF THE TWO-DIMENSIONAL GRAVITY GRADIENT TENSOR

ZHU Zi-qiang[1], ZENG Si-hong[1], LU Guang-yin[1], YAN Wen-jie[2]

(1. *School of Info-physics and Geomatics Engineering*, *Central South University*, *Changsha* 410083, *China*; 2. *East China Mineral Exploration & Development Bureau for Nonferrous Resources*, *Nanjing* 210007, *China*)

Abstract: Gravity gradient tensor was introduced in this study, and the finite element method was applied to the two-dimensional gravity gradient tensor forward. In order to prove the correctness of the finite element method, the authors comparatively studied the forward result and analytical solution of a two-dimensional body whose cross section is the combination of two rectangles. It can be seen that the forward result is well consistent with the FEM numerical solution. Through forwarding the two-dimensional body which has irregular cross section and homogeneous density in each element, the authors have concluded that the complex two-dimensional body can be forwarded by mesh generation to approximate irregular borders and by assigning different densities to different elements.

Key words: complex two-dimensional body; gravity gradient tensor; finite element method; forward simulation

作者简介:朱自强(1964 -),男,教授,博导,主要研究方向为重磁正反演。