井—地三维激发极化数据快速反演

吕玉增^{1,2},阮百尧²,彭苏萍¹

(1.煤炭资源与安全开采国家重点实验室,北京 100083;2.桂林理工大学 地球科学学院,广西 桂林 541004)

摘要:为实现井一地激发极化数据的快速反演,分析三维有限元正演四面体网格剖分形成的系数矩阵的元素规律,应用 MSR 非零元素压缩存储和 SSOR-PCG 方程求解技术,提高了正演执行效率。在正演基础上,利用 Jacobian 矩阵与正演方程的简单关系,采用共轭梯度法求解最小二乘目标函数的模型修改量,避开 Jacobian 矩阵的直接计算和存储,实现了三维井-地激电数据的分钟级快速反演。模型正演合成数据的反演结果表明,能基本再现已知的 模型。

关键词:井一地激电;激发极化法;最小二乘快速反演

中图分类号: P631 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 8918(2012)03 - 0473 - 06

井-地激发极化法(简称井-地激电)是指井中供 电,地面观测的一种电法勘探方法,由于其供电点位 于地下,更靠近目标体,而在地面观测,观测方式灵 活、数据采集方便,所以在石油、矿产勘探等领域广 泛应用[1-4]。然而,井-地激电受供电点位置影响 大,在供电点对应的地面附近,异常容易出现畸变且 特征复杂,定性解释难度大,迫切需要三维定量反演 解释技术。反演计算速度是决定三维反演方法实用 性的关键因素之一。针对井一地三维有限元法正演 算法,分析系数矩阵的元素规律,采用系数矩阵的 MSR 非零元素压缩存储和 SSOR-PCG 方程求解技 术,实现了快速正演。三维反演中,利用 Jacobian 矩 阵A与正演方程的简单关系,避开A的直接计算和 存储,而仅计算 $A(A^{T})$ 与向量的乘积等,应用共轭 梯度迭代技术(CG)实现三维井一地激电数据的分 钟级的最小二乘快速反演。

1 最小二乘约束反演

1.1 目标函数

将视电阻率数据反演问题线性化,并加入光滑 约束和已知信息,构造最小二乘反演目标函数^[9]

$$\Psi_{p} = \|W_{d}(\Delta d - A\Delta m)\|^{2} + \|W_{m}(m - m_{0} + \Delta m)\|^{2},$$
 (1)
式(1)右端第一项为常规的最小二乘项,第二项为

已知先验信息项,其中, Δd 为数据残差矢量;m为 预测模型向量; m_0 为已知模型向量;A为偏导数矩 阵; W_d 为观测数据拟方差矩阵, W_m 为模型加权矩 阵。

对目标函数式(1)中的 Δm 求导,并令其等于 零,利用 W₄、W_m 的对称性,得到线性方程组

 $(A^{\mathrm{T}}W_{d}^{\mathrm{T}}W_{d}A + W_{m}^{\mathrm{T}}W_{m})\Delta m =$

$$A^{\mathsf{T}}W_{d}^{\mathsf{T}}W_{d}\Delta d + W_{m}^{\mathsf{T}}W_{m}(m_{0} - m), \qquad (2)$$

写成迭代形式

$$m_{j+1} = m_j + \Delta m = m_j + (A^T W_d^T W_d A + W_m^T W_m)^{-1}$$

 $[A^{T}W_{d}^{T}W_{d}\Delta d + W_{m}^{T}W_{m}(m_{0} - m)]_{o}$ (3) 视极化率数据反演目标函数:

$$\Psi_{\eta} = \| W_{d}(\eta_{a} - A\eta) \|^{2} + \| W_{m}(\eta - \eta_{0}) \|^{2},$$
(4)

η。为视极化率数据向量;η 为预测模型向量;η。为 已知模型向量,其他参数与式(1)相同。对η求导 并令其等于零,得到方程组形式

 $(A^{\mathsf{T}}W_d^{\mathsf{T}}W_dA + W_m^{\mathsf{T}}W_m)\eta = A^{\mathsf{T}}W_d^{\mathsf{T}}W_d\eta_a + W_m^{\mathsf{T}}W_m\eta_0,$ (5)

由于A已经在电阻率反演中得到,因此只需很小的 工作量即可完成极化率反演。

1.2 CG 迭代算法

常规求解式(1)反演问题,要先计算 Jacobian 矩阵 A,然后计算模型参数的改正项 Δm,不断修正

收稿日期:2011-04-18

基金项目:国家自然科学基金(40774057)、全国危机矿山接替找矿项目新技术新方法示范项目(200799086)、广西自然科学基金(桂科自 0832263)、广西地质工程中心重点实验室项目(桂科能07109011 - K009)、桂林理工大学科研启动基金项目

模型,直到模型参数符合给定的精度。对于井一地 激电数据的反演而言,若有 p 个供电点,每个供电点 有 n 个观测数据,反演区域有 m 个网格单元, A 是 所有观测数据对各个网格参数求导,那么 A 的大小 为 $(p \times m \times n)^2$ 。对于三维反演而言,反演的网格单 元多,直接求取和存储 A 将耗费巨大的计算机资 源,几乎无法在 PC 机上完成。Zhang 曾采用共轭梯 度(CG)迭代法求解改正项 Δm ,避开 A 的直接求取 和存储⁽⁵⁾,整个迭代过程仅需要计算乘积 Ax 和 A^Ty ,这样反演效率主要取决于三维正演和 Ax (A^Ty) 的计算。

- 2 有限元快速正演
- 2.1 四面体剖分有限元正演

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = -I\delta(A) \in \Omega$$

$$\partial u/\partial n = 0 \in \Gamma, \qquad (6)$$

$$\partial u/\partial n + u \cdot \cos(r, n)/r = 0 \in \Gamma_{\infty}$$

其中, Γ ,为区域 Ω 的地面边界, Γ 。为区域 Ω 的地下 边界,n为边界的外法向方向, σ 为介质的电导率,u为电位。式(6)等价的变分问题为式(7)

$$\begin{cases} F(u) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^{2} - I \delta(A) u \right] d\Omega + \\ \frac{1}{2} \iint_{\Gamma_{n}} \sigma \cdot \cos(r, n) \cdot u^{2} / r d\Gamma , \\ \delta F(u) = 0 \end{cases}$$
(7)

将积分区域 Ω 剖分成许多四面体单元,并假定单元 内电导率 σ 均匀,电位线性变化。式(7)对每个四 面体单元进行积分、求和,并扩展成由全体节点组成 的矩阵,令其变分为零,得线性方程组^[14]

$$Ku = p, \qquad (8)$$

u 是全部节点的 u, 组成的列向量, p 是与点电源项 有关。计算中适当选取 Γ_s 边界以满足齐次边界条 件, 而近似忽略式(7) 右端第二项无穷远边界积分, 这时 $K = \Sigma K$,。解方程组(8), 得到各节点的电位。

设四面体单元 e 的 4 个角点编号为 1、2、3、4,坐 标为(x,,y,,z,), i = 1,2,3,4;则有

$$K_{\epsilon} = (k_{ij}) = (k_{ji}) = \frac{\sigma_{\epsilon}}{36V}(a_{i}a_{j} + b_{i}b_{j} + c_{i}c_{j}) , \qquad (9)$$

$$i = j = 1, 2, 3, 4_{\circ}$$

其中, V 是四面体单元体积; a_i、b_i、c_i 是与四面体单 元顶点坐标有关的常数, 具体计算式为

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_i & 1 \\ z_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, ,$$

$$a_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, b_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, c_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}; ;$$

$$a_2 = -\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, b_2 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, c_2 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}; ;$$

$$a_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, b_3 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}, c_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}; ;$$

$$a_4 = -\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, b_4 = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, c_4 = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} o$$

2.2 MSR 矩阵存储和 SSOR-PCG 迭代求解

上面有限元法正演形成的系数矩阵 K 是对称、 稀疏矩阵,其中绝大部分元素值为零,但每行零元素 的分布和个数不同,与网格剖分和节点编号有关,通 常采用变带宽技术存储 K。例如,对直角坐标系中 网格节点($x \times y \times z$) = (5 × 5 × 5)的三维四面体剖





图 1 四面体网格剖分和系数矩阵下三角非零元素分布

分,网格节点个数为125,四面体单元个数为320,节 点编号遵循 z—x—y 的坐标先后顺序,形成的系数 矩阵非零元素分布见图 1 所示,常规变带宽存储这 个下三角阵需要 3 225 个元素,而非零元素个数仅 有 810 个,可见非零元素存储较变带宽存储可大大 节省内存。网格剖分数越多,非零元素存储的优势 越明显。

MSR(modified sparse row)是一种改进的行压缩 索引存储技术,该方法以行为单位,顺序存储系数矩 阵中的非零元素。考虑到在方程组的求解过程中, 系数矩阵对角线元素均不为零,且对角线元素的访 问和运算最频繁,所以把对角线元素提出来单独存 储。该存储方式仅需要两个数组:实型数组 AA 和 整型数据 ICOL。

实型数组 AA(M+1):AA 数组前 N 个元素顺 序存储系数矩阵的主对角线元素,第 N+1 个元素 为任意值;从第 N+2 元素开始,按行存储除对角线 元素之外的其他非零元素。整型数组 ICOL(M+ 1):ICOL(1) = N+2,从第 2 到第 N 个元素存放系 数矩阵的各行第一个非零元素在 AA 中的位置, ICOL(N+1) = M+2;其他元素存放与 AA 数组对 应元素在系数矩阵中的列号。上述说明中 M 为非 零元素个数,N 为方程的阶数。

分析四面体剖分系数矩阵中非零元素的分布规 律,编写了井-地激电三维有限元正演系数矩阵非零 元素 MSR 格式存储子程序^[14] MSR(NX,NY,NZ, ICOL,K),其中 NX、NY 和 NZ 分别为直角坐标系 下x,y,z 三个方向网格节点剖分个数,为输入参数; ICOL(M+1),K = M+1 为输出参数,为实际的非零 元素个数。

下面介绍用 SSOR-PCG 迭代法求解方程组(8) 的过程。

对称系数矩阵 K 可写为对角阵 D 和严格下三

角阵 E 的和形式: $K = D - E - E^T$, M 为 K 的 SSOR 预条件矩阵,则

$$M^{-1}Ku = M^{-1}p ,$$

$$M = (D - \omega E)D^{-1}(D - \omega E^{T}) ,$$

其中,
$$\omega \in [0,2]$$
,为松弛因子,通过试算来确定。
初始值 $r_0 = p - Kx_0, z_0 = M^{-1}r_0, q_0 = z_0$,计算
 $\alpha_j = (r_j, z_j)/(Kq_j, q_j)$
 $x_{j+1} = x_j + \alpha_j q_j$
 $r_{j+1} = r_j - \alpha_j Kq_j$
 $z_{j+1} = M^{-1}r_{j+1}$
 $\beta_j = (r_{j+1}, z_{j+1})/(r_j, z_j)$
 $q_{j+1} = z_{j+1} + \beta_j q_j,$

j=0,1,2,3…,直至收敛。

由于预条件矩阵 M 与系数矩阵 K 具有相同的 稀疏性,同样也采用 MSR 压缩存储,整个迭代过程 只是系数矩阵非零元素的运算,计算量小,计算速度 快。

3 Jacobian 矩阵计算

即

在方程(8)两边分别对模型参数求导。方程右 端项是电源项,与模型参数无关,得

$$\frac{\partial K}{\partial \sigma} u + K \frac{\partial u}{\partial \sigma} = 0 ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \sigma} u , \qquad (10)$$

Jacobian 矩阵
$$A = (\partial u / \partial \sigma)$$
 与向量 x 的乘积

$$Ax = -K^{-1}\frac{\partial K}{\partial \sigma}ux , \qquad (11)$$

考虑 K 的对称性,矩阵 A^{T} 与向量 y 的乘积为

$$\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{K}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{u}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y} \quad (12)$$

式(11)、式(12)说明,Ax 和 A^Ty 的计算可以转化为 类似正演方程求解和矩阵相乘的相关运算,这就避 免了 Jacobian 矩阵 A 的直接计算和存储。分析这两

3 期

式右端项∂K/∂σ 的计算,式(9)说明∂K/∂σ_i 是仅与 第 *i* 单元的4 个节点有关,其他元素为零,在正演计 算中已经计算出来,只需将其保存即可。

4 反演算例

算例一。模型如图 2 所示,均匀半空间下方有 一个低阻高极化体和一个高阻异常体, $\rho_0 = 100 \Omega \cdot$ m, $\eta_0 = 1\%$, $\rho_1 = 10 \Omega \cdot$ m, $\eta_1 = 50\%$, $\rho_2 = 1 000 \Omega$ ·m, $\eta_2 = 1\%$;低阻高极化异常体顶部埋深 $h_1 = 7$





m,离钻孔距离 $d_1 = 1$ m,模型大小 $a_1 \times b_1 \times c_1 = 6$ m ×4 m×2 m;高阻异常体 $h_2 = 4$ m, $d_2 = 5$ m, $a_2 \times b_2$ × $c_2 = 3$ m×4 m×3 m;井中供电地面观测,供电点 位于钻孔深度 H = 10 m 处,地面测线沿 x 方向布 设,观测电极距 MN = 1 m,测点距 1 m,相邻测线距 1 m。以井口为坐标原点,通过三维有限元正演生成 地面9 条测线(y 为 $-4 \sim 4$ m)共 270 个视电阻率和 视极化率"实测数据"。

反演初始模型取均值,电阻率为 100 Ω · m,极 化率为 1%。经过 5 次反演迭代,在计算平台(Dell Workstation PWS650, Intel(R) Xeon(TM) CPU2. 8 GHz 2. 79 GHz,内存 2.00 GB) 上耗时约 9.3 min (SSOR-PCG 迭代 30 次),结束电阻率和极化率的反 演。

图3给出了2条测线下方电阻率和极化率反演 结果。对比已知模型,电阻率的反演结果基本圈定 了高、低阻异常体的位置、延伸范围及边界,低阻异 常体的反演电阻率数值基本逼近真实值,而高阻体 差异较大,在供电点周围,反演出现了一些多余的高 阻构造。极化率反演结果较电阻率的反演结果明显 要好,基本反映出了异常体形态和边界,在供电点位 置周围,极化率反演结果出现负值和小的多余构造。

分析井-地观测方式,客观上观测数据反映井中 供电点以上的地电信息更多一些,这是造成供电点 上部反演效果明显优于下部的主要原因。由于单点 的井中供电地面观测获取的数据信息量少,反演本 身的多解性导致了反演出现多余构造。



图 3 算例一不同测线的电阻率和极化率反演结果

算例二。二维山脊地形(图4),山脊高10 m, 宽20 m,两侧坡度45°,钻孔位于山脊侧坡上。45° 倾斜板状异常体位于地形下方偏钻孔一侧,厚度2 m,x方向延伸6 m,y方向延伸4 m。背景参数ρ₀ =



图4 算例二地电模型及供电点位置示意

100 $\Omega \cdot m, \eta_0 = 1\%$, 异常体参数 $\rho_1 = 10 \Omega \cdot m, \eta_1 = 20\%$ 。地面测线沿 *x* 方向布设, 测点距 1 m, 相邻 测线距 1 m, 山顶对应坐标零点。

钻孔穿过异常体,揭露深度为7~9 m。为了增加数据信息量,在钻孔中布设两个供电点,一个位于钻孔揭露的异常体中心位置上,深度8 m,另一个位于异常体的下方,深14 m。在地面布设了7条测线(y为-3~3 m),通过三维有限元正演生成840个"实测数据"(其中420个一次场电位数据,420个二次场数据)。

为减少反演的多解性,将钻孔揭露异常体的位置和电性(电阻率和极化率)作为已知模型 m₀ 对反 演加以约束,经过6次 CC 反演迭代,在计算平台上 耗时约11.4 min(SSOR-PCG 迭代 30次)。图5为 不同测线上电阻率和极化率的反演结果。电阻率和 极化率的反演结果清晰地反映了异常体的位置、倾 向和延伸,数值上与已知模型参数值也比较接近。



图 5 算例二不同测线的电阻率(上)和极化率(下)反演结果

5 结论

利用 MSR 非零元素存储和 SSOR-PCC 方程求 解技术实现了井-地三维激电的快速正演,为实现快 速反演奠定了基础。

从模型正演合成数据三维反演结果来看,由于 反演本身的多解性等原因,井-地激电反演出现了一 些虚假的多余构造,容易引起错误解释,合理利用钻 孔资料对反演进行约束可提高反演效果。基于共轭 梯度反演耗时约为分钟级,基本实现了井-地激电数 据的快速三维反演。 总体上,井-地激电数据的反演对供电点上部区 域的反演效果明显好于下部区域,主要是由于井-地 观测方式获取的供电点上部区域信息更多一些。因 此,在井-地激电实际工作中,应尽可能把供电点至 于异常体的下方。另外,必要时可在井中多个位置 供电,多次观测,以增加观测数据信息量。

参考文献:

- [1] 何展翔.大功率井-地电法油藏边界预测技术及效果[J].石油 勘探与开发,2004,31(5):74-76.
- [2] 汤井田,张继锋,冯兵,等.井地电阻率法歧离率确定高阻油气 藏边界[J].地球物理学报,2007,50(3):926-931.

- [3] 岳建华,刘志新.井一地三维电阻率成像技术[J].地球物理学 进展,2005,20(2):407-411.
- [4] 许新刚,刘志新,壬大庆,矿井电阻率成像技术的现状与展望
 [J].地球物理学进展,2004,19(1);052-055.
- [5] Zhang J, Mackie R L, Madden T R. 3D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients [J]. Geophysics, 1995, 60(5):1313-1325.
- [6] Wilkinson P B, Chambers J E, Meldrum P I, et al. Optimization of array configurations and geometries for the detection of abandoned mineshafts by 3D cross-hole electrical resistivity tomography
 [J]. Journal of Environmental and Engineering Geophysics, 2006, 11(1):213-221.
- [7] Jonathan E C, Paul B W, Alan L W, et al. Mineshaft imaging using surface and crosshole 3D electrical resistivity tomography: a case history from the East Pennine Coalfield, UK[J]. Journal of

Applied Geophysics, 2007, 62(4):324-337.

- [8] 吴小平,徐果明.利用共轭梯度法的电阻率三维反演研究[J].
 地球物理学报,2000,43(3):420-427.
- [9] 阮百尧,村上裕,徐世浙,电阻率/激发极化率数据的二维反演 程序[J].物探化探计算技术,1999,21(1):116-125.
- [10] 徐凯军,李桐林,张辉,等.基于共轭梯度法的垂直有限线源三 维电阻率反演[J].煤田地质与勘探,2006,34(3):69-71.
- [11] 安然,李桐林,徐凯军.井地三维电阻率反演研究[J]. 地球物 理学进展,2007,22(1):247-249.
- [12] 柯敢攀,黄清华.井地电法的三维正反演研究[J].北京大学学报:自然科学版,2008,40:62-70.
- [13] 吕玉增,阮百尧.复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限 元数值模拟[J].地球物理学进展,2006,21(4):1302-1308.
- [14] 吕玉增.地-井、井-地 IP 三维快速正反演研究[D]. 长沙:中南 大学,2008.

THREE-DIMENSIONAL FAST INVERSION OF BOREHOLE-SURFACE DATA

LV Yu-zeng^{1,2}, RUAN Bai-yao², PENG Su-ping¹

(1. State Key Laboratory of Coal Resources and Safe Mining, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China; 2. College of Earth Sciences, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Based on an analysis of coefficient matrix formed from three-dimensional FEM (finite element method) forward with tetrahedral cells division, the authors used MSR (Modified Sparse Row) memory method and SSOR-PCG for solving equations to realize the fast forward of borehole-surface IP surveying. The inversion technique is based on the least-squares and CG (conjugate gradient), and it makes use of the simple relationship between Jacobian matrix A and the forward equation, which needs only to solve and multiplying a vector and avoids direct calculation and access of matrix. The 3-D fast inversion with minutes of PC time is achieved. The inversion results of three-dimensional borehole-surface forward synthetic data reproduce the known models approximately. Key words: borehole-surface IP; induced polarization (IP); least-squares fast inversion

作者简介: 吕玉增(1978-),男,河北邢台人,在读博士后,副教授,主要从事电法数值模拟与反演成像研究。