起伏地表条件下三维直流电场拟解析近似方法

张金会[1], 刘德鹏[1], 张亚东[2]
(1. 安徽省勘查技术院, 安徽 蚌埠 233005; 2. 长庆油田公司 勘探部, 陕西 西安 710021)

摘 要: 为了研究起伏地表条件下三维直流电场问题, 基于全空间的拟解析近似理论, 推导出起伏地表条件下三维直流电场的拟解析近似理论公式。将起伏地表条件下地下存在异常体时所产生的异常电场分为两部分, 其中一部分为地下三维异常体所产生的体异常电场, 通过对异常体的体积分求得; 另一部分为由起伏地表所产生的面异常电场, 可以利用对起伏地表地空界面的面积分求得。利用拟解析理论, 对两部分异常分别推导体电反射函数和面电反射函数, 得到起伏地表下电场积分方程的拟解析近似公式。该理论公式为解决起伏地表问题提供了一种思路, 丰富了拟解析理论的应用, 为直接进行正反演模拟、消除起伏地表对电法勘探的影响打下了基础。

关键词: 起伏地表; 拟解析近似; 三维直流电场; 电反射函数
中图分类号: P631 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-8918(2012)04-0692-05

我国西部地区地表条件复杂, 在山区和地形起伏剧烈地区进行电法勘探时, 起伏地表是影响电法勘探的重要因素[1]。它常常会导致视电阻率曲线发生严重的畸变[2], 产生假异常; 有时又会掩盖真异常; 有时又会使得异常发生扭曲变形, 造成目标体异常形态发生变化和位置移动。因此对起伏地表条件下电场研究具有重要的理论和实际意义, 是提供电法勘探效果的重要问题之一。

体积分方程法在研究三维问题时, 可以避免传统微分数值方法中大型矩阵和大型线性代数方程组求解问题, 并仅需要对异常体进行计算, 可以大大提高计算效率, 因此在模拟有限大小的三维体时更有效。在电磁场领域运用体积分方程法时, 为了快速求解积分方程, 前人进行了大量的研究也提出了很多的近似方法, 如波恩近似方法、里托夫近似等[3]。在对电磁场问题进行研究时, Habashy T M 等研究了波恩近似和里托夫近似提出了局部非线性近似方法[3]。受到 Habashy T M 的局部非线性近似思想的启发, Zhdanov 等[4]提出了用拟线性近似方法来求解电磁波散射场的积分方程, 通过假设异常电场 $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})$ 与正常电场 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ 之间是拟线性关系, 即: $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$, 通过这一假设简化了计算电磁场散射的积分方程, 提高计算速度, 其中电反射张量 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})$ 由最优化的方法得到, 由于在求解电反射张量时仍需求解大型代数方程组, 因此 Zhdanov 经过研究, 假设电反射张量 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r})$ 在异常体内为缓变函数, 对拟线性近似公式进行了简化, 这种方法称为拟解析近似方法[5]。孙建国将拟线性近似方法和拟解析近似方法引入到直流电场模拟及声波散射模拟中, 2002 年将拟线性近似方法用于地球物理反演问题中[6]。孙建国在 2003 年对研究了稳定电流场的电位反射函数[7]。孙建国在 2004 年对稳定电流场中的拟线性近似方法进行了分析[8~9], 给出了直流电位场数值模拟的拟解析方法[10]。孙建国[11]对直流电场中的电反射张量进行了研究, 推导了直流电场中的拟线性近似方法及拟解析近似方法的理论公式, 并对电反射张量和面电流等问题进行了详细的分析。孙建国又对稳定电流场拟解析近似方法进行精度分析[12]。孙建国[13]于 2006 年对稳定电流场拟解析近似方法进行了数值评价。张金会[14]对拟解析近似方法进行了实现, 并进行了直流电场拟解析近似精度分析与评价。

起伏地表对电法勘探的影响从电法勘探用于矿产勘探的开始就已经被注意到了, 因此消除其影响就已经开始提上日程了。最初使用物理模拟方法用于地形改正, 后用解析方法研究地形改正, 随着电子计算机的发展, 数值模拟方法开始用于研究起伏地表问题, 用起伏地表条件下的直接正反演消除地形的影响。徐世浙等[15~17]、罗延钟等[18]、熊彬等[2]、Sasaki[19]、强建科等[20~21]利用有限元法研究了起伏地表条件下电阻率正演问题; 孙建国[22]提出了坐标变换法、插值法、曲坐标法等处理起伏地表条件下电

收稿日期: 2012-03-10

场和电阻率的思路;孙章庆等[22]利用坐标变换法二维起伏地表条件下直流电场数值模拟,张东良等[23]利用插值法实现边界条件的有限差分法模拟起伏地表问题;罗延钟等[18]、吴小平等[24]则采用有限差分法来研究起伏地表问题。

在处理起伏地表问题时,多采用曲化平法,插值法,坐标变换法,三角元法模拟电场起伏地表等,各种方法在处理起伏地表问题时,各有千秋,但多集中在有限元法、边界元法和有限差分法等,鉴于此,笔者引入利用积分方程法处理直流电场的拟解析近似方法,研究基于积分方程法的起伏地表条件下直流电场的数值模拟理论。

1　异常电场表达式

起伏地表条件下地下均匀各项同性介质中含有异常体 Ω,均匀介质电导率为 σ_0,异常体电导率为 σ,σ_a 为异常电导率(图 1),则

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_a 。 \tag{1}$$

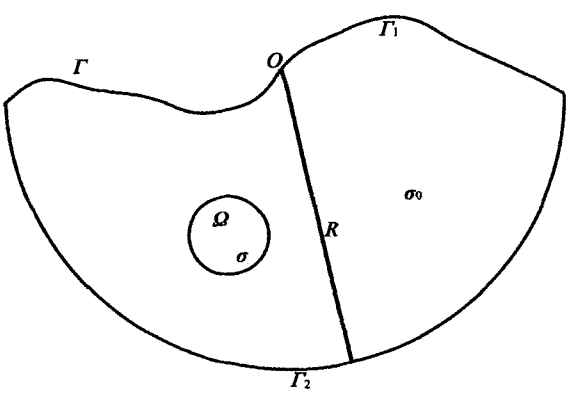

图 1　起伏地表条件下地电模型示意

介质中的总电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 可以看作是由两部分组成的,即背景场 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$ 和异常场 $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})$,则

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

在起伏地表条件下,异常电场 $\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r})$ 可以分为两部分,由界面引起的异常 $\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})$ 和由异常体引起的异常 $\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})$,即

$$\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

由地下异常体引起的异常电场[3] $\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})$ 可以表示为:

异常体内部场

$$\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \frac{\sigma_a(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tag{4}$$

异常体外部场

$$\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{5}$$

式(4)、式(5)中

$$\boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \sigma_a(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 分别为场点和源点位置矢量,μ 为磁导率,$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为全空间并矢格林函数,$\boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})$ 为异常体 Ω 内的体电流密度。

由界面引起的异常电场 $\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})$ 可以表示为

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Gamma} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{aS}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{7}$$

式(7)中

$$\boldsymbol{j}_{aS}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \tag{8}$$

$\boldsymbol{j}_{aS}(\boldsymbol{r})$ 为界面 Γ 处的面电流密度。式(7)中界面 Γ 由两部分组成,起伏地表 Γ_1 及 $R\to\infty$ 时的地下半球面 Γ_2(见图 1),即 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$。

因此式(7)中的面积分可以分为两个面积分:

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS\Gamma_2}(\boldsymbol{r}), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{E}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{10}$$

$$\boldsymbol{E}_{aS\Gamma_2}(\boldsymbol{r}) = \int_{\Gamma_2} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{aS\Gamma_2}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \tag{11}$$

式(10)、式(11)中的 $\boldsymbol{j}_{aS\Gamma_1}$ 和 $\boldsymbol{j}_{aS\Gamma_2}$ 分别为界面 Γ_1 和 Γ_2 处的面电流密度。

当式(11)中的 $R\to\infty$ 时,很容易得到 $\boldsymbol{E}_{aS\Gamma_2}(\boldsymbol{r})$ 对式(9)的贡献为 $\boldsymbol{E}_{aS\Gamma_2}(\boldsymbol{r})\to 0$,由此式(9)可简化为

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) \approx \boldsymbol{E}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})。 \tag{12}$$

地表处的面电流密度 $\boldsymbol{j}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$ 可以表示成法向电流密度 $\boldsymbol{j}_{naS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$ 和切向电流密度 $\boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$ 的矢量和(图 2):

$$\boldsymbol{j}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_{naS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})。$$

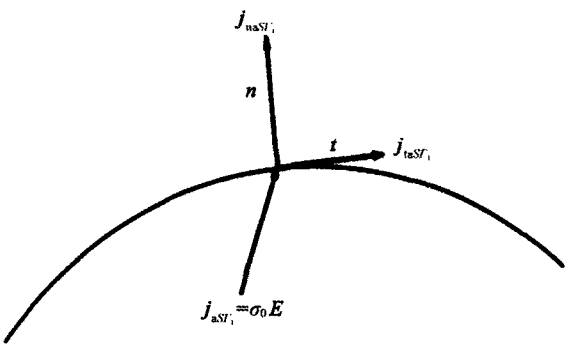

图 2　地表处的面电流密度 $\boldsymbol{J}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$ 示意

地表处地空界面电流不能穿过界面进入空气中,所以电流密度的边界条件 $\boldsymbol{j}_{naS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = 0$,即地表电流密度法向分量为零,因此 $\boldsymbol{j}_{aS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$。

将此边界条件代入式(9)中可得，

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) \approx \int_{\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'。 \quad (13)$$

将式(13)及式(5)代入式(4)中，得到异常体内部异常电场表达式

$$\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r}) = \int_\Omega \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \frac{\sigma_a(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})] + \int_{\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'。 \quad (14)$$

将式(13)及式(5)代入式(3)中，得到起伏地表条件下异常体外部异常电场表达式

$$\boldsymbol{E}_a(\boldsymbol{r}) = \int_\Omega \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \int_{\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}')}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad (15)$$

$$\boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \sigma_a(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \sigma_a(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) + \sigma_a(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}), \quad (16)$$

$$\boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \sigma_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) + \sigma_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})。 \quad (17)$$

2　地表和地下异常体引起的异常电场的拟解析近似解

对于图 1 中的地质模型，由式(3)可得总场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的表达式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})。 \quad (18)$$

为了求得 $\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})$，将面异常电场表示为正常场的拟线性函数，令

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}), \quad (19)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}), \quad (20)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r})$ 为面电反射函数。

面电流密度 $\boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r})$ 为

$$\boldsymbol{j}_{taS\Gamma_1}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})]。 \quad (21)$$

将式(21)代入式(13)得到地表引起的 r 处的电场

$$\boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}) \approx \int_{\Gamma_1} \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \sigma_0(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r})]}{\mu} \mathrm{d}\boldsymbol{r}', \quad (22)$$

式中

$$\boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) + lv_S\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')}{\mu}\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')\right] + lv_S\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')}{\mu}\boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}')\right], \quad (23)$$

$$lv_S = \int_\Gamma \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot 。 \quad (24)$$

由地表引起异常场的 Born 近似 $\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r})$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) = lv_S\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}')}{\mu \cdot}\right]。 \quad (25)$$

假设电反射张量为零阶的，$\boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r})$ 可以写成 $\boldsymbol{\lambda}_S(\boldsymbol{r}) = \lambda_S(\boldsymbol{r})\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 是单位张量。为求 $\lambda_S(\boldsymbol{r})$，整理式(23)可得

$$\lambda_S(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) + \lambda_S(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) + lv_S\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')}{\mu}\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')\right], \quad (26)$$

由于 $\lambda_S(\boldsymbol{r})$ 是标量函数，在式(26)两边点乘背景场 $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$，经过变型可以得到

$$\lambda_S(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} + \lambda_S(\boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} + \frac{lv_S\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')}{\mu}\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')\right] \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}, \quad (27)$$

令

$$g_S(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{E}_{BaS}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}, \quad (28)$$

将式(28)代入式(27)，可以得到面电反射函数

$$\lambda_S(\boldsymbol{r}) = \frac{g_S(\boldsymbol{r}) + \frac{lv_s\left[\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r}')}{\mu}\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}')\right] \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}}{1 - g_S(\boldsymbol{r})}。 \quad (29)$$

下面推导体电反射函数。

将体异常电场表示为正常场的拟线性函数，令

$$\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}), \quad (30)$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r})$ 为体电反射函数，则总场可以写为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}), \quad (31)$$

体电流密度可以写成

$$\boldsymbol{j}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \sigma_a(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sigma_a(\boldsymbol{r})[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})], \quad (32)$$

将式(32)代入式(4)，得到由异常体引起的异常体内部 r 处电场

$$\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\sigma_a(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r})] + \int_\Omega \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \sigma_a(\boldsymbol{r}')[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}')]}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'。 \quad (33)$$

将式(32)代入式(5)，得到由异常体引起的异常体外部 r 处电场

$$\boldsymbol{E}_{a\Omega}(\boldsymbol{r}) = \int_\Omega \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \sigma_a(\boldsymbol{r}')[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\lambda}_\Omega(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}') + \boldsymbol{E}_{aS}(\boldsymbol{r}')]}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'。 \quad (34)$$

对式(33)、式(34)中 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 的积分用 lv_Ω 表示

$$lv_\Omega = \int_\Omega \mathrm{d}\boldsymbol{r}' \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \cdot \quad , \quad (35)$$

由异常体引起的 Born 近似场 $\boldsymbol{E}_{Ba\Omega}$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r}) = lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}')\right]。\quad (36)$$

由式(33)可以得到

$$\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r}) + lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r}')\right] + lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}')\right] - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})。\quad (37)$$

由式(34)可以得到

$$\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r}) + lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r}')\right] + lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}')\right]。\quad (38)$$

首先,假设电反射张量为零阶的,$\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r})$可以写成$\boldsymbol{\lambda}_{\Omega}(\boldsymbol{r}) = \lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{I}$是单位张量,为求得$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$,整理式(38)可得

$$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r}) + \lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r}') + lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r}')\right] - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}) - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})。\quad (39)$$

经数学推导,式(39)通过变型可以得到

$$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma_0(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})}\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} + \lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})\frac{\sigma_0(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})}\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} + \frac{\sigma_0(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})}\frac{lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r}')\right]\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} - \frac{\sigma_a(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})} - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}。\quad (40)$$

令$g_{\Omega}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma_0(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})}\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}$,可以得到体电反射函数$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$:

$$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r}) = \frac{g_{\Omega}(\boldsymbol{r}) + \frac{\sigma_0(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})}\frac{lv_{\Omega}\left[\frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r}')}{\mu\sigma_0(\boldsymbol{r}')}\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r}')\right]\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})} - \frac{\sigma_a(\boldsymbol{r})}{\sigma(\boldsymbol{r})} - \frac{\sigma_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})}{\sigma_0(\boldsymbol{r})}\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})}}{1 - g_{\Omega}(\boldsymbol{r})}。\quad (41)$$

3　总异常电场的拟解析近似方法求解

上面得到了$\lambda_S(\boldsymbol{r})$和$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$的表达式,将$\lambda_S(\boldsymbol{r})$和$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$分别代入式(22)、式(33)或式(34),可以分别得到由起伏地表引起的异常场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})$和由地下异常体在异常体内或异常体外引起的异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}\Omega}(\boldsymbol{r})$。将两部分异常场代入式(3),得到起伏地表问题的总异常电场的拟解析近似解。

由于地表对地下异常体的影响很大,因此在利用拟解析近似方法求解起伏地表问题时,需要注意计算顺序。首先要计算面异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})$,在计算$\lambda_S(\boldsymbol{r})$时,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}\Omega}(\boldsymbol{r})$用 Born 近似场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{Ba}\Omega}(\boldsymbol{r})$代替;然后再计算体电反射函数$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$,求得体异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}\Omega}(\boldsymbol{r})$。最后将面异常电场和体异常电场相叠加可以得到总异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})$。

4　结论

总电场$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$分为背景场$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})$和异常场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})$。由于起伏地表的存在,又将异常场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{r})$分为由起伏地表引起的面异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})$和地下异常体引起的体异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}\Omega}(\boldsymbol{r})$。通过利用拟解析近似方法进行研究,利用面电反射函数$\lambda_S(\boldsymbol{r})$和体电反射函数$\lambda_{\Omega}(\boldsymbol{r})$分别求得面异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}S}(\boldsymbol{r})$和体异常电场$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}\Omega}(\boldsymbol{r})$,得到了解决起伏地表问题的理论公式,为消除电法勘探中的起伏地形对勘探数据影响打下了基础,可以提高电法勘探工作的地质效果。

参考文献:

[1] 孙鸿雁,林天亮,李汝传. 电法勘探地形影响问题研究进展[J]. 地质与勘探,2003,39(增刊):135 - 141.

[2] 熊彬,阮百尧,罗延钟. 复杂地形条件下直流电阻率异常三维数值模拟研究[J]. 地质与勘探,2003,39(4):60 - 64.

[3] Habashy T M, Groom W R, Spies R B. Beyond the born and rytov approximations: a nonlinera approach to electromagnetic scattering [J]. Journal of geophysical research, 1993, 98(B2): 1759 - 1775.

[4] Zhdanov M S, Fang S. Quasi-liner approximation in 3-D eledtromagnetic modeling[J]. Geophysics, 1996, 61(3).

[5] Zhdanov M S, Dmitriev V I, Fang S, et al. Quasi-analytical approximations and series in electromagnetic modeling[J]. Geophysics, 2000, 65(6).

[6] 陈丽虹,孙建国, 吴燕冈等. 地球物理反演的拟线性近似方法综述[J]. 地球物理学进展,2002,17(3):464-472.
[7] 孙建国. 稳定电流场的电位反射函数[C]//中国地球物理,南京:南京师范大学出版社,2003.
[8] 孙建国. 稳定电流场数值模拟的拟线性近似[C]//中国地球物理,西安:西安地图出版社,2004.
[9] 陈丽虹,孙建国. 稳定电流场的拟线性近似方法研究[J]. 石油地球物理勘探. 2004,39(5):589-593.
[10] 孙建国. 直流电位场数值模拟的拟解析法[C]//中国地球物理,西安: 西安地图出版社, 2004.
[11] Sun J G. On the electrical reflectivity tensor in D. C. electric field modelling[J]. Geophysical Prospecting,2005,53.
[12] 孙建国. 稳定电流场拟解析近似精度分析[C]//中国地球物理,长春: 吉林大学出版社,2005.
[13] 孙建国. 稳定电流场拟解析近似的数值评价[C]//中国地球物理,成都: 四川科学技术出版社,2006.
[14] 张金会,孙建国. 直流电场拟解析近似精度分析与评价[C]//中国地球物理,北京: 中国大地出版社,2008.
[15] 徐世浙,阮百尧,周辉,等. 用边界元法模拟三维地形对 MT 场的影响[J]. 科学通报,1996,41(23):2162-2164.
[16] 徐世浙,阮百尧,周辉,等. 大地电磁场三维地形影响的数值模拟[J]. 中国科学:D 辑,1997,27(1):15-20.
[17] 徐世浙,王庆乙,王军. 用边界单元法模拟二维地形对大地电磁场的影响[J]. 地球物理学报,1992:381-388.
[18] 罗延钟,万乐. 二维地形不平条件下均匀外电场的有限差分模拟[J]. 物探化探计算技术,1984,6(4):15-26.
[19] Szarka L. Comment on aspects of charge-accumulation in D. C. resestivity expenriments' By Y. li and D. W. Oldenburg L. Szarka [J]. Geophysical Prospecting,1992,53(3):411-421.
[20] 强建科. 起伏地形三维电阻率正演模拟与反演成像研究[D]. 武汉:中国地质大学,2006.
[21] 强建科,罗延钟. 三维地形直流电阻率有限元法模拟[J]. 地球物理学报,2007,50(5):1606-1613.
[22] 孙章庆,孙建国,张东良. 二维起伏底边条件下坐标变换法直流电场数值模拟[J]. 吉林大学学报:地球科学版,2009,39(3):528-534.
[23] 张东良,孙建国,孙章庆. 二维起伏地表直流电场插值法数值模拟[J]. 世界地质,2009,28(2):242-248.
[24] 吴小平. 非平坦地形条件下电阻率三维反演[J]. 地球物理学报,2005,48(4):932-936.
[24] 王建历,阮百尧,黄俊革,等坑道直流电法环境影响三维数值模拟与结果分析[J]. 物探与化探,2011,35(3):414-418

THE QUASI-ANALYTICAL METHOD FOR THE THREE-DIMENSIONAL D. C. ELECTRICAL FIELD MODELING ON UNDULATE TOPOGRAPHY

ZHANG Jin-hui[1], LIU De-peng[1], ZHANG Ya-dong[2]

(1. *Anhui Institute of Geological Exploration Technologies, Bengbu* 233005, *China*; 2. *Exploration Department of Changqing Oil Field Company, Xi'an* 710021, *China*)

Abstract: The quasi-analytical method is a means for solving integration equations. To study the three-dimensional D. C. electrical field under surface topography, this paper puts forward the formula of the quasi-analytical theory for the three-dimensional D. C. electrical field under the surface topography based on the quasi-analytical theory for the whole space. The authors divide the anomalous electric field at the surface into two parts, one is the body anomalous electric field caused by the anomalous body, which can be solved by the body integral, whereas the other is the surface anomalous electric field resulting from the interface between the earth and the air, which can be calculated by the surface integral. The authors inferred the body electrical reflectivity tensor and the surface electrical reflectivity tensor separately. The quasi-analytical theory was used to deduce the formula of the quasi-analytical theory under the surface topography. This formula can give us a train of thought for solving the surface topography problem. It can enrich the quasi-analytical theory and promote the forward and inverse modeling of the D. C. electrical field, thus laying a foundation for eliminating the effect of the surface topography.

Key words: surface topography; quasi-analytical method; three-dimensional D. C. electric field; electric reflectivity

作者简介: 张金会,(1980-),男,河北衡水人,吉林大学博士,研究方向为地球物理正反演、直流电场数值模拟模拟。