第 16卷 第 2期 中 国 岩 溶 Vol. 16 No. 2
1997年 6月 CARSOLOGICA SINICA Jun. 1997

岩溶管道(洞穴)形态空间的数学描述及分形计算研究*

李文兴
(地矿部岩溶地质研究所)

摘 要 本文给出了岩溶管道(洞穴)的数学模型,使岩溶管道(洞穴)研究从形象描述进入到数学描述。同时,笔者以杭州瑶琳洞为例,应用经简化后的数学模型进行分维计算,求出反映洞穴空间形态复杂程度的分形维数,为岩溶洞穴的定量研究提供了新方法。

关键词 数学模型 洞穴 维数

0 引 言

岩溶洞穴是岩溶介质中最典型的一种,是喀斯特现象的重要标志,它对地下水的储存和运移起着很重要的作用,特别是它对地下水的运移和排泄是其它类型的岩溶介质难以比拟的。一般来说,洞穴的宽度与洞穴的定义有密切的关系。国际洞穴联合会(ISU)将洞穴定义为人可以进入的天然的地下空洞。1989年 D. C. Ford等定义喀斯特洞穴为直径或者宽度大于 5~10mm的地下溶蚀空间,因为这是紊流的有效最小孔径。洞穴空间是极其复杂的,如果要将洞穴空间用数学模型进行完整的描述,那么对洞穴断面上的每一个点都要进行测量,因为洞穴每一个断面的数据都可能不一样,断面的周边也极不规则。从水动力学的角度来看,断面的变化必然要产生局部阻力。因此,有必要对其形态空间进行数学描述及研究。

1 岩溶管道(洞穴)的数学描述

对任何事物进行定量分析,必须首先进行模型概化,然后再进行数学描述。为了描述岩溶洞穴空间要素的方便,先给出两个定义,即洞穴的轴向和洞穴的径向。在岩溶管道断面形心上沿洞穴长度方向的走向称为洞穴轴向。在岩溶洞穴断面形心上垂直于轴向而指向洞穴周边的

* 为国家自然科学基金项目(编号 49272146)和中国地质科学院青年科技基金项目(编号: 9012)部分成果。
作者简介: 李文兴,男,1957年生,高级工程师,1982年毕业于中山大学数学力学系力学专业。(541004)桂林市七星路 40号。
收稿日期: 1996-08-27;改回日期: 1996-12-17

方向称为径向。

1.1 岩溶管道(洞穴)的一般数学描述

定义了岩溶洞穴的轴向和径向,不管洞穴多么复杂,都可以用一般数学来描述,即

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \vec{r} = \vec{r}(s,r) = \vec{f}(s,r,\theta) \end{cases} \tag{1}$$

式中,$s= s(t)$是用弧坐标来描述洞穴轴向的方程。假想一动点沿已知轨迹作曲线运动,在轨迹上任意取一固定点 O(洞口)为参考点。为了确定动点在轨迹的位置,把轨迹的一端定为正方向,另一端定为负方向。动点在轨迹上某一瞬时 t的位置,可由参考点 O(洞口)到瞬时点的那段轨迹的长度—— 弧长 $s(t)$表示,并根据动点在参考点的哪一边加上相应的正负号,这种带正负号的弧长 s称为点的弧坐标。实际上,该方程描述的是一条曲线,即洞穴横断面形心的连线。方程(1)的第二式是用极坐标来描述的洞穴断面(洞穴径向)方程。其中,s为在断面形心上沿轴向与参考点(或洞口)的弧长(轴向长度),r为垂直于洞穴轴向线,从洞穴断面形心到洞穴内壁的距离(径向距离),θ为逆时针围绕洞穴轴向转动的极坐标角度。

1.2 岩溶管道(洞穴)一般数学方程的简化

方程式(1)是描述岩溶洞穴的一般数学方程,要应用它来解决实际问题还比较困难。因为对于一般岩溶洞穴,其洞穴内壁上任何一个点几乎都不是一个相同的值,其轴向线也不一定是直线。因此,这个数学模型相当复杂。另外,从数学分析的角度上看,它是一个处处连续而又处处不一定可导的数学模型。因为在洞穴的内壁上,这个复杂的曲面至今尚未找到有任何规律可循。在对洞穴测量时,又不可能对洞穴的横向尺寸进行全面的测量。所以有必要将上述一般数学模型进行简化。

在式(1)中,如果不考虑极坐标角度 θ的影响,即 r与 θ无关,这也就是说在洞穴横断面的任何方向上 r都相等。这时洞穴断面就变成一个半径为 r的圆,岩溶洞穴就成为一个变径的圆形洞穴,其洞穴模型的数学表示为:

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \vec{r} = \vec{r}(s,r) = \vec{f}(s,r,) \end{cases} \tag{2}$$

当然,式(2)所描述的变径岩溶洞穴的断面圆心与实际岩溶洞穴断面形心还是在同一曲线上,只是假想将洞穴的内壁进行了修整,使之变成圆周。式(2)中各个变量的意义与式(1)相同。

如果对(2)再进行简化,考虑 r与 s无关,即在洞穴的任何断面上(也就是不论 s为何值),洞穴横断面都是半径相等的圆,这时岩溶洞穴变成断面为圆形的圆柱。即:

$$\begin{cases} s = s(t) \\ \vec{r} = \vec{r}(r) = \vec{f}(r) \end{cases} \tag{3}$$

这种岩溶洞穴模型,在研究岩溶管道水运动机理上,可以用阻力元件对实体进行等效物理模拟。因为加阻力元件的等效管道已经考虑到物质的质量守衡和能量转换。但这种模型不适宜于数学模拟,因为它难以反映能量守衡。特别地,从水动力学的角度来看,它没有反映洞穴对水流运动的局部阻力影响。因此,对岩溶洞穴的描述,建立岩溶洞穴的数学模型,最好使用如(2)所示的数学模型。

2 岩溶管道 (洞穴)数学模型的分形研究

2.1 岩溶管道 (洞穴)数学模型的分形描述

以上虽然给出了岩溶洞穴的数学模型,如何应用这些模型,其困难是不言而喻的。似乎用基础数学研究岩溶洞穴介质已经到了山穷水尽的地步,但是分形理论给它带来了柳暗花明。

如果仅对岩溶洞穴的长度使用分形的方法来研究,不考虑岩溶洞穴的横断面,洞穴的维数在 1~ 2维之间。如果对上述岩溶洞穴模型 (2)进行分形研究,就能比较全面的反映实际岩溶洞穴,因为它至少考虑了岩溶洞穴空间形态。由于岩溶洞穴空间的复杂性,可以预计岩溶洞穴的维数大于 3。

根据豪斯道夫维数 (Hausdorff dimension)的定义[1],对于一个客体 (这里是指岩溶洞穴),如果度量其"容积" (管道容积)的单位 (单位球)半径为 R,用该单位度量客体的结果 $N(R)$满足以下关系:

$$N(R) = cR^{-D_f} \propto R^{-D_f} \tag{4}$$

则该客体的维数为 D_f,式中 c是不随 R而变化的常数。这里用大写"R"是为了区别上述数学模型的小写"r"。

将这种分形理论直接应用来描述实际岩溶洞穴,毫无疑问是较好的一种数学方法。考虑到岩溶洞穴测量的困难程度,事实上不可能对岩溶洞穴的横向尺寸进行高密度的测量,因而以下只对岩溶洞穴的数学模型 (2)进行有限度的分形理论应用,具体做法如下:

沿岩溶洞穴的轴向,每间隔一适当距离$\triangle s$,取洞穴横向尺寸 $r_1 r_2,\cdots,r_n$,作为简化后洞穴的半径,这时数学模型 (2)变成:

$$\begin{cases} s_i = s(t_i) \\ \vec{r} = \vec{r}(s_i, r_i) = \vec{f}(s_i, r_i) \end{cases} \tag{5}$$

式中 $i = 1, 2,\cdots,n$,为洞穴横向尺寸的个数。实际上岩溶洞穴已经被一个个半径为 $r_1, r_2,\cdots, r_n$的圆柱体所代替,当 $n \to \infty$时,洞穴模型 (5)趋于模型 (2)。

现在针对模型 (5)应用分形理论,求解其分形维数,研究岩溶洞穴空间的复杂性。由于岩溶洞穴已经被简化成一个个圆柱体,对这样的岩溶空间,采用不同半径 (R)的小圆球来填充。然后计算填充洞穴所用小圆球的个数,再取其豪斯道夫维数。下面以瑶琳洞为例说明具体求维数的方法。

2.2 瑶琳洞穴特征与分形计算

瑶琳洞穴位于杭州市所辖的桐庐县城西北 25km的瑶琳洞[2],其洞穴纵剖面图如图 1所示。

瑶琳洞的主洞走向主要是: NE30°~ 60°SW,有 5个洞段,洞道长约 354m,占全洞道总长的 38.3%; NEE60°~ 90°SWW,有 6个洞段,长约 352m,占 37.9%,即二者洞道走向长度之和占全洞道总长的 76.2%。其他走向为次, NEE0°~ 30°SSW,有 2个洞段,长约 88m,占 9.5%; NNW0°~ 30°SSE,有 1个洞段,长约 12m,占 1.3%; NW30°~ 60°SE,有 3个洞段,长约 66m,占 7%。NW30°~ 60°SE,有 2个洞段,长 56m,占 6%。该四者洞道走向长度之和,占全洞道总长的 23.8%。

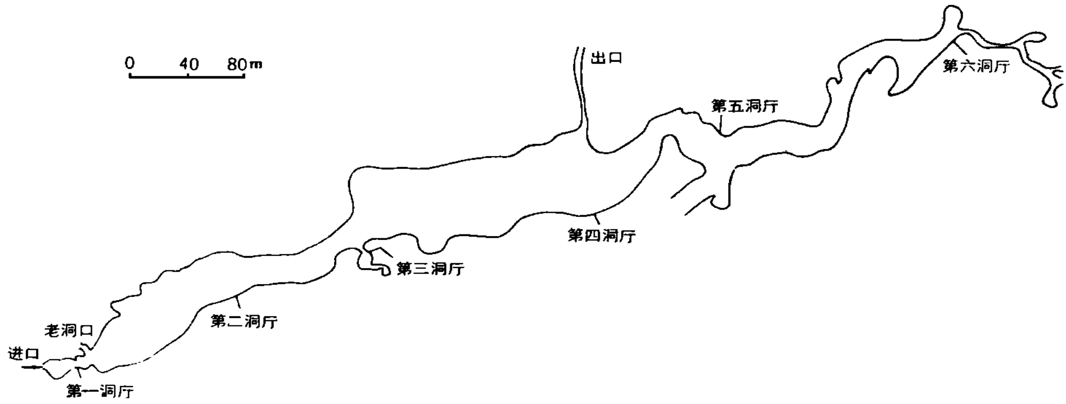

图 1 瑶琳洞洞穴图

Fig. 1 Yaolin cave

2. 2. 1 洞穴断面尺寸数据的提取

按照上述岩溶洞穴数学模型 (5)的要求 ,要提取瑶琳洞洞穴断面尺寸数据 ,在图 1上分别每间隔 1cm(当然还可取更小的间隔)量其横断面尺寸。量取数据的方法是: 在沿其轴向取垂直该轴向的断面 ,量该断面的高度 ,以这一尺寸代表模型的直径 ,数据见表 1。

表 1 瑶琳洞洞穴横断面尺寸 单位: m

Tab. 1 Cross section size of Yaolin cave

距洞口距离	断面直径	距洞口距离	断面直径	距洞口距离	断面直径	距洞口距离	断面直径	距洞口距离	断面直径	距洞口距离	断面直径
20	4	160	36	300	50	440	64	580	54	720	18
40	12	180	36	320	56	460	58	600	28	740	16
60	14	200	22	340	66	480	54	620	24	820	4
80	38	220	22	360	58	500	26	640	26	840	2
100	48	240	24	380	62	520	14	660	20	860	4
120	44	260	14	400	50	540	26	680	16	880	4
140	40	280	22	420	56	560	30	700	20	900	4

2. 2. 2 分形维数的计算

已经简化的岩溶管道模型 (表 1)是由 45个直径为 $2r$,高度为 s的圆柱构成的 (如果分得更细 ,圆柱体的个数更多)。现在分别用半径为 R的小圆球去度量 (充填)该管道模型空间 ,度量尺度 R就是分形的标度。对应度量标度 R的测量结果为 $N(R)$。$N(R)$也就是以半径为 R的小球充满管道模型时的小球的总个数。度量结果见表 2。可见 ,$N(R)$随 R的不同而变化。

填充管道模型的工作量非常大 ,完全靠计算机来完成。计算机工作过程是这样的:

首先求出直径为 $2r$的圆中所包含半径为 R的小圆的个数。由于填充的起点和过程的不同 ,还可能造成小圆的总个数稍有不同。这里是以模型的圆心为起点 ,以填充小圆最紧密 ,填充小圆个数最多为条件。

表 2　瑶琳洞分形统计表

Tab. 2　Fractal statistics of Yaolin cave

测量标度 $R(m)$	测量结果 $N(R)$	测量标度 $R(m)$	测量结果 $N(R)$	测量标度 $R(m)$	测量结果 $N(R)$	测量标度 $R(m)$	测量结果 $N(R)$	测量标度 $R(m)$	测量结果 $N(R)$
1	117240	7	153	13	20	19	7	25	3
2	13445	8	120	14	11	20	6	26	2
3	3282	9	95	15	9	21	3	27	2
4	1174	10	59	16	8	22	3	28	2
5	688	11	17	17	8	23	3	29	1
6	233	12	16	18	8	24	3	30	0

然后再考虑填充圆柱体的高度为 s_i,填充是以圆柱的底面为起点,向另一底面逐层填充,也是以填充个数最多、最紧密为条件。

计算过程框图见图 2,计算结果见表 2。

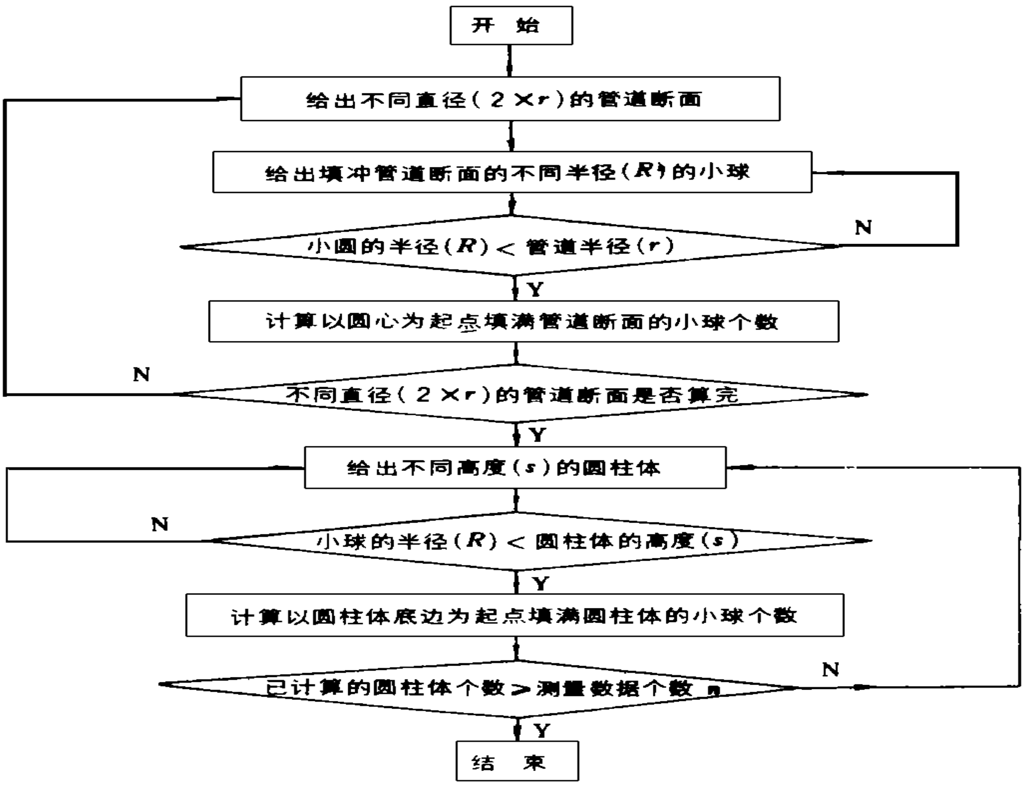

图 2　瑶琳洞分维填充计算框图

Fig. 2　The block diagram of fractal filling in Yaolin cave

将填充小球的半径 R 视为自变量,小球的个数 $N(R)$ 看作因变量,作 $\ln R-\ln N(R)$ 图(图3)。

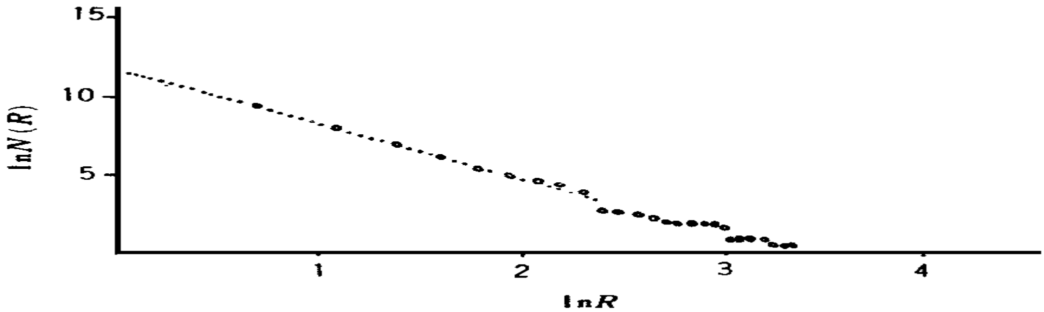

图 3 瑶琳洞分维计算 $\ln N(R)$ 和 $\ln R$ 关系图

Fig. 3 The relation between ln $N(R)$ and ln R for fractal calculation in Yaolin cave

将图3中最接近于直线的一段用回归的方法,进行直接回归拟合,求出 R 依赖于 $N(R)$ 的关系,其回归方程为:

$$\ln N(R)=17.1965-3.405\ln R \tag{6}$$

方程的斜率 3.405就是该岩溶洞穴的分形维数 D_f。依据分维理论及图3的分维图,R 的无标度区为[1,10]。

3 认识与结论

(1)本文给出了4个岩溶管道(洞穴)模型:即

$$\begin{cases} s=s(t) \\ \vec{r}=\vec{r}(s,t)=\vec{f}(s,r,\theta) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} s=s(t) \\ \vec{r}=\vec{r}(s,r)=\vec{f}(s,r,) \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} s=s(t) \\ \vec{r}=\vec{r}(r)=\vec{f}(r) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} s=s(t_i) \\ \vec{r}=\vec{r}(s_i,r_i)=\vec{f}(s_i,r_i) \end{cases} \tag{4}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

四个模型性质相同。根据不同的应用,选取不同的模型。模型(1)具有理论上的意义,为一般洞穴模型;模型(2)或(4)适用于数学描述和计算(如进行分维计算),其中模型(2)为连续变径洞穴模型,模型(4)为离散变径洞穴模型;模型(3)为圆柱型洞穴模型,可用来研究岩溶管道水的运动等,但该模型过于简单。

(2)以上对岩溶洞穴进行了数学描述,其数学模型不但可以应用在分形计算上,还可以应用在其他方面。当然,具体应用并非一件容易的事。本文进行的分形计算,只是对所给出数学

模型的应用。至于它与地质条件的联系,现正探求之中。

本文在完成过程中得到郭纯青研究员,夏日元副研究员,王刚工程师等课题组成员的大力支持,在此一并表示感谢。

参 考 文 献

1 李后强,程光钺,分形与分维.四川教育出版社, 1990
2 林钧枢,张耀光等.瑶琳洞形成与环境研究.中国科学技术出版社, 1993

MATHEMATIC MODEL AND FRACTAL CALCULATION OF THE FORM OF KARST CAVE VOID

Li Wenxing
(*Institute of Karst Geology, MGMR*)

Abstract

A mathematic model of karst cave is established, which makes it possible to turn morphologic description of karst cave into mathematic. Taking Yaolin cave as an example, the author makes fractal calculation by a simplified mathematic model and obtains fractal dimension reflecting the complexity of the form of cave void. It will offer a new way to quantitative research on karst cave.

Key words Mathematic model Cave Dimension